UNIVERSITETI I SHKODRËS “LUIGJ GURAKUQI”

Fakulteti i Shkencave të Natyrës · Bachelor në Matematikë · Viti III

TOPOLOGJI

Kapitulli 3 · Hapësirat metrike

Leksioni 3.2 · Topat metrikë dhe bashkësitë e hapura

Prof. As. Dr. Siditë Duraj · 2026–2027

Qëllimi. Leksioni ndërton urën ndërmjet metrikës (Leksioni 3.1) dhe topologjisë (Kapitulli 2): me anë të topave të hapur, çdo metrikë përcakton në mënyrë natyrale një topologji.

Rezultatet e të nxënit. Në përfundim të leksionit, studenti është në gjendje:

(1) të përkufizojë topin e hapur, topin e mbyllur dhe fqinjësinë e një pike në një hapësirë metrike;

(2) të përshkruajë topat për metrika të ndryshme në $\mathbb{R}$, në $\mathbb{R}^2$ dhe për metrikën diskrete;

(3) të vërtetojë se çdo top i hapur është bashkësi e hapur dhe se çdo top i mbyllur është bashkësi e mbyllur;

(4) të vërtetojë se bashkësitë e hapura sipas një metrike formojnë një topologji.

Njohuritë paraprake. Aksiomat e metrikës dhe metrikat d_1, d_2, d_∞ (Leksioni 3.1, Përkufizimi 3.1.1 dhe Teorema 3.1.7); aksiomat e topologjisë, bashkësitë e mbyllura dhe fqinjësitë (Kapitulli 2, Përkufizimet 2.1, 2.12 dhe 2.29).

Në gjithë leksionin, (X, d) është një hapësirë metrike.

3.2.1. Topat metrikë

Përkufizimi 3.2.1 (Topi i hapur dhe topi i mbyllur)**.** Për $a \in X$ dhe $r > 0$ përkufizojmë

$$B_d(a, r) = \{x \in X : \ d(a, x) < r\}, \qquad B_d[a, r] = \{x \in X : \ d(a, x) \leq r\}.$$

Bashkësia e parë quhet *top i hapur*, kurse e dyta *top i mbyllur*, me qendër a dhe rreze r. Qendra i përket gjithmonë topit: $d(a, a) = 0 < r$.

Shembulli 3.2.2 (Topat në drejtëzën reale)**.** Në $\mathbb{R}$ me metrikën $d(x,y) = |x-y|$ kemi $|x-a| < r \iff a-r < x < a+r$, prandaj

$$B_d(a,r) = (a-r,\, a+r), \qquad B_d[a,r] = [a-r,\, a+r].$$

Për shembull, $B_d\left(2, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

Shembulli 3.2.3 (Topat për metrikën diskrete)**.** Le të jetë $d_{\text{dis}}(x,y) = 0$ për $x = y$ dhe $d_{\text{dis}}(x,y) = 1$ për $x \neq y$. Meqë distancat e mundshme janë vetëm 0 dhe 1,

$$B_{d_{\text{dis}}}(a,r) = \begin{cases} \{a\}, & 0 < r \leq 1, \\ X, & r > 1, \end{cases} \qquad B_{d_{\text{dis}}}[a,r] = \begin{cases} \{a\}, & 0 < r < 1, \\ X, & r \geq 1. \end{cases}$$

Në veçanti, për $r = 1$ kemi $B_{d_{\text{dis}}}(a,1) = \{a\}$, ndërsa $B_{d_{\text{dis}}}[a,1] = X$.

Vërejtje 3.2.4 (Topi i mbyllur dhe mbyllja)**.** Topi i mbyllur shënohet me kllapa katrore, $B_d[a,r]$, që të mos ngatërrohet me *mbylljen* topologjike $\overline{B_d(a,r)}$ të topit të hapur, pra me bashkësinë më të vogël të mbyllur që përmban $B_d(a,r)$. Meqë $B_d[a,r]$ është bashkësi e mbyllur që përmban $B_d(a,r)$ (Pohimi 3.2.14), gjithmonë vlen $\overline{B_d(a,r)} \subseteq B_d[a,r]$. Barazimi mund të mos vlejë. Shembulli 3.2.3 e tregon këtë: nëse X ka të paktën dy pika, bashkësia $B_{d_{\text{dis}}}(a,1) = \{a\}$ është e mbyllur (Ushtrimi 3.2.6), pra mbyllja e saj është $\{a\}$, ndërsa $B_{d_{\text{dis}}}[a,1] = X \neq \{a\}$.

Shembulli 3.2.5 (Topat në $\mathbb{R}^2$)**.** Për qendrën $0 = (0,0)$ dhe rrezen 1, topat e hapur sipas metrikave d_1, d_2, d_∞ (Leksioni 3.1, Teorema 3.1.7) janë

$$\begin{aligned} B_{d_1}(0,1) &= \{(x,y) :\ |x| + |y| < 1\}, \\ B_{d_2}(0,1) &= \{(x,y) :\ x^2 + y^2 < 1\}, \\ B_{d_\infty}(0,1) &= \{(x,y) :\ \max\{|x|,|y|\} < 1\}. \end{aligned}$$

Ata janë përkatësisht brendësia e rombit, e rrethit dhe e katrorit të Figurës 3.2.1; pikat e vijave kufizuese nuk u përkasin topave të hapur. Figura tregon edhe përfshirjet $B_{d_1}(0,1) \subseteq B_{d_2}(0,1) \subseteq B_{d_\infty}(0,1)$, që rrjedhin nga mosbarazimet $d_\infty \leq d_2 \leq d_1$ (Leksioni 3.1, Pohimi 3.1.8): një pikë që ka distancë më të vogël se 1 sipas d_1 e ka distancën më të vogël se 1 edhe sipas d_2 dhe d_∞.

3.2.2. Fqinjësitë dhe bashkësitë e hapura

Përkufizimi 3.2.6 (Fqinjësia)**.** Një bashkësi $V \subseteq X$ quhet *fqinjësi* e pikës $a \in X$ nëse ekziston $r > 0$ i tillë që $B_d(a,r) \subseteq V$.

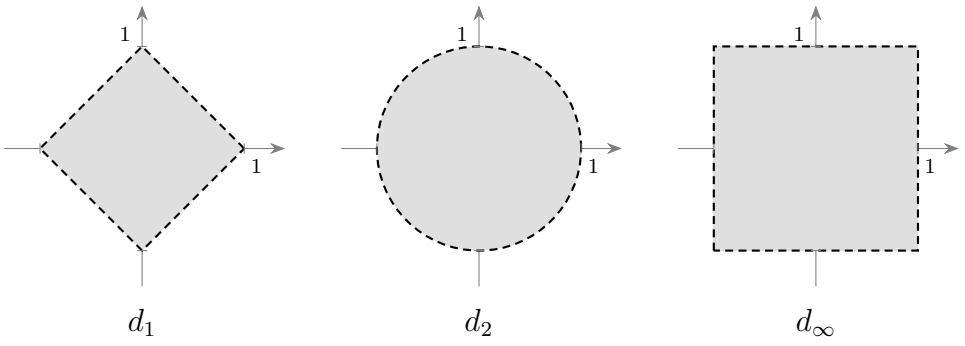


Figura 3.2.1. Topat e hapur me qendër 0 dhe rreze 1 në $\mathbb{R}^2$ për metrikat d_1, d_2 dhe d_∞. Pjesa e hijezuar është topi; vija e ndërprerë tregon se pikat kufizuese nuk i përkasin atij.

Përkufizimi 3.2.7 (Bashkësia e hapur)**.** Një bashkësi $U \subseteq X$ quhet *e hapur* në (X, d) nëse për çdo $a \in U$ ekziston $r_a > 0$ i tillë që $B_d(a, r_a) \subseteq U$.

Me fjalë të tjera, U është e hapur atëherë dhe vetëm atëherë kur U është fqinjësi e secilës prej pikave të veta. Kështu, një bashkësi e hapur "i rrethon" të gjitha pikat e saj.

Teorema 3.2.8 (Çdo top i hapur është bashkësi e hapur)**.** *Për çdo $a \in X$ dhe çdo $r > 0$, bashkësia $B_d(a, r)$ është e hapur.*

Vërtetim. Le të jetë $x \in B_d(a, r)$. Atëherë $d(a, x) < r$, prandaj $\varepsilon = r - d(a, x) > 0$. Pohojmë se $B_d(x, \varepsilon) \subseteq B_d(a, r)$. Vërtet, nëse $y \in B_d(x, \varepsilon)$, nga pabarazia trekëndore

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \varepsilon = r,$$

pra $y \in B_d(a, r)$. Meqë x ishte një pikë çfarëdo e topit, $B_d(a, r)$ është e hapur. ■

Nga Teorema 3.2.8 rrjedh se fqinjësia metrike e Përkufizimit 3.2.6 përputhet me fqinjësinë në kuptimin e Kapitullit 2 (Përkufizimi 2.29) për topologjinë τ_d të Seksionit 3.2.3: nëse $B_d(a, r) \subseteq V$, atëherë vetë topi është bashkësi e hapur që përmban a dhe përmbahet në V; anasjelltas, një bashkësi e hapur që përmban a përmban, sipas përkufizimit, një top me qendër a. Kështu, karakterizimi "U është e hapur $\iff$ U është fqinjësi e çdo pike të saj" është rast i veçantë i Teoremës 2.30.

Pohimi 3.2.9 (Karakterizimi me topa)**.** *Një bashkësi $U \subseteq X$ është e hapur atëherë dhe vetëm atëherë kur është bashkim topash të hapur.*

Vërtetim. ($\Rightarrow$) Nëse U është e hapur, për çdo $x \in U$ zgjedhim $r_x > 0$ me $B_d(x, r_x) \subseteq U$. Atëherë

$$U = \bigcup_{x \in U} B_d(x, r_x),$$

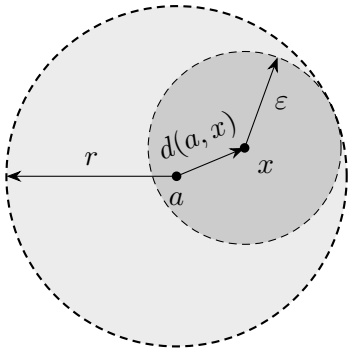


Figura 3.2.2. Ideja e Teoremës 3.2.8: për $x \in B_d(a,r)$, topi me qendër x dhe rreze $\varepsilon = r - d(a,x)$ përmbahet në $B_d(a,r)$.

sepse çdo top i bashkimit përmbahet në U, ndërsa çdo $x \in U$ i përket topit të vet $B_d(x, r_x)$. Për $U = \varnothing$ ky është bashkimi i familjes boshe.

($\Leftarrow$) Le të jetë $U = \bigcup_{i\in I} B_d(a_i, r_i)$ dhe $x \in U$. Atëherë $x \in B_d(a_i, r_i)$ për ndonjë $i \in I$. Sipas Teoremës 3.2.8, ekziston $\varepsilon > 0$ me $B_d(x,\varepsilon) \subseteq B_d(a_i, r_i) \subseteq U$. Pra U është e hapur. ■

3.2.3. Topologjia e induktuar nga metrika

Teorema 3.2.10 (Topologjia e induktuar nga metrika)**.** *Familja e bashkësive të hapura sipas metrikës d,*

$$\tau_d = \{U \subseteq X : \ U \text{ është e hapur në } (X,d)\},$$

është një topologji në X.

Vërtetim. Kontrollojmë aksiomat (T1)–(T3) të Përkufizimit 2.1.

(1) Bashkësia $\varnothing$ është e hapur, sepse kushti i Përkufizimit 3.2.7 nuk ka asnjë pikë për t'u kontrolluar. Bashkësia X është e hapur, sepse për çdo $x \in X$ kemi $B_d(x,1) \subseteq X$.

(2) Le të jetë $(U_i)_{i\in I}$ një familje bashkësish të hapura dhe $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Për $x \in U$ ekziston $i_0 \in I$ me $x \in U_{i_0}$, dhe ekziston $r > 0$ me $B_d(x,r) \subseteq U_{i_0} \subseteq U$. Pra U është e hapur.

(3) Le të jenë $U_1, \ldots, U_n$ bashkësi të hapura, me $n \geq 1$, dhe $x \in \bigcap_{k=1}^n U_k$. Për çdo k ekziston $r_k > 0$ me $B_d(x,r_k) \subseteq U_k$. Numri $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$ është pozitiv, sepse është minimumi i një numri të fundëm numrash pozitivë, dhe $B_d(x,r) \subseteq B_d(x,r_k) \subseteq U_k$ për çdo k. Pra $B_d(x,r) \subseteq \bigcap_{k=1}^n U_k$. (Prerja e familjes boshe është X, e cila është e hapur sipas pikës (1).) ■

Për $X = \mathbb{R}$ dhe $d(x,y) = |x-y|$, topat janë intervalet $(a-r, a+r)$ dhe τ_d është pikërisht topologjia e zakonshme τ_{zak} (Kapitulli 2, Përkufizimi 2.7); vërtetimi i mësipërm

përgjithëson atë të Teoremës 2.8. Për metrikën diskrete, $\tau_{d_{\text{dis}}}$ është topologjia diskrete (Ushtrimi 3.2.2).

Vërejtje 3.2.11. Topologjia τ_d quhet *topologjia e induktuar* nga metrika d. Metrika të ndryshme mund të induktojnë të njëjtën topologji; për shembull, Figura 3.2.1 sugjeron se d_1, d_2 dhe d_∞ induktojnë të njëjtën topologji në $\mathbb{R}^2$. Kjo çështje trajtohet në Leksionin 3.4.

Shembulli 3.2.12 (Një prerje e pafundme që nuk është e hapur)**.** Në pikën (3) të vërtetimit kërkohet që familja të jetë e fundme: për një familje të pafundme, minimumi i rrezeve mund të mos jetë pozitiv. Në $\mathbb{R}$ me metrikën e zakonshme, çdo $U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = B_d\left(0, \frac{1}{n}\right)$ është e hapur, por $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$ nuk është e hapur, sepse çdo top $B_d(0, r)$ përmban pika të ndryshme nga 0 (Kapitulli 1, Shembulli 1.6). Këtu rrezet $\frac{1}{n}$ nuk kanë minimum pozitiv.

Vërejtje 3.2.13 (Bashkësitë e mbyllura)**.** Meqë (X, τ_d) është hapësirë topologjike, bashkësitë e mbyllura janë ato të Përkufizimit 2.12: $F \subseteq X$ është *e mbyllur* në (X, d) nëse $X \setminus F \in \tau_d$. Ato plotësojnë aksiomat duale të Teoremës 2.14.

Pohimi 3.2.14 (Çdo top i mbyllur është bashkësi e mbyllur)**.** *Për çdo $a \in X$ dhe çdo $r > 0$, bashkësia $B_d[a, r]$ është e mbyllur.*

Vërtetim. Duhet të tregojmë se $X \setminus B_d[a, r]$ është e hapur. Le të jetë $x \notin B_d[a, r]$, pra $d(a, x) > r$, dhe le të jetë $\varepsilon = d(a, x) - r > 0$. Nëse $y \in B_d(x, \varepsilon)$, nga pabarazia trekëndore dhe simetria e metrikës

$$d(a, x) \leq d(a, y) + d(y, x) \quad \Longrightarrow \quad d(a, y) \geq d(a, x) - d(x, y) > d(a, x) - \varepsilon = r,$$

pra $y \notin B_d[a, r]$. Kështu $B_d(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus B_d[a, r]$, dhe komplementi është i hapur. ■

3.2.4. Ushtrime të zgjidhura

Çdo ushtrim (në kornizë) pasohet nga zgjidhja e plotë, e cila fillon me metodën; fundi i saj shënohet me □.

Ushtrimi 3.2.1 (bazë)**.** Gjeni $B_d\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ dhe $B_d\left[-1, \frac{3}{2}\right]$ në $\mathbb{R}$, ku $d(x, y) = |x - y|$.

Zgjidhje*. Metoda.* Shndërrojmë mosbarazimin me vlerë absolute në mosbarazim të dyfishtë.

Kushti $|x + 1| < \frac{3}{2}$ është i barasvlershëm me $-\frac{3}{2} < x + 1 < \frac{3}{2}$, pra me $-\frac{5}{2} < x < \frac{1}{2}$. Prandaj

$$B_d\left(-1, \frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad B_d\left[-1, \frac{3}{2}\right] = \left[-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

ku i dyti përftohet njësoj nga $|x + 1| \leq \frac{3}{2}$. □

Ushtrimi 3.2.2 (bazë)**.** Vërtetoni se në një hapësirë me metrikën diskrete çdo nënbashkësi është e hapur, pra $\tau_{d_{\text{dis}}} = \mathcal{P}(X)$.

Zgjidhje*. Metoda.* Gjejmë një rreze për të cilën topi përbëhet vetëm nga qendra.

Le të jetë $U \subseteq X$ dhe $x \in U$. Sipas Shembullit 3.2.3, $B_{d_{\text{dis}}}\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\} \subseteq U$. Pra U është e hapur. Meqë U ishte çfarëdo, $\tau_{d_{\text{dis}}} = \mathcal{P}(X)$, pra metrika diskrete induktion topologjinë diskrete të Kapitullit 2 (Shembulli 2.3). □

Ushtrimi 3.2.3 (mesatar)**.** Në $\mathbb{R}^2$ me metrikën d_∞, përshkruani topin $B_{d_\infty}\big((1, -1), 2\big)$.

Zgjidhje*. Metoda.* Maksimumi i dy numrave është më i vogël se 2 atëherë dhe vetëm atëherë kur të dy numrat janë më të vegjël se 2.

Për $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \max\{|x - 1|, |y + 1|\} < 2 &\iff |x - 1| < 2 \text{ dhe } |y + 1| < 2 \\ &\iff -1 < x < 3 \text{ dhe } -3 < y < 1. \end{aligned}$$

Meqë çdo hap është ekuivalencë, $B_{d_\infty}\big((1, -1), 2\big) = (-1, 3) \times (-3, 1)$, drejtkëndëshi i hapur me qendër $(1, -1)$ dhe brinjë me gjatësi 4. □

Ushtrimi 3.2.4 (mesatar)**.** Vërtetoni se $[0,1]$ është bashkësi e mbyllur në $\mathbb{R}$ me metrikën e zakonshme.

***Zgjidhje**. Metoda.* E shkruajmë bashkësinë si top të mbyllur dhe zbatojmë Pohimin 3.2.14.

Për $x \in \mathbb{R}$ kemi $\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2} \iff 0 \leq x \leq 1$. Pra $[0,1] = B_d\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, e cila është e mbyllur sipas Pohimit 3.2.14. □

Ushtrimi 3.2.5 (argumentues)**.** Vërtetoni se në çdo hapësirë metrike, për çdo dy pika të ndryshme $a \neq b$ ekzistojnë topa të hapur $B_d(a,r)$ dhe $B_d(b,r)$ pa pika të përbashkëta.

***Zgjidhje**. Metoda.* Marrim si rreze gjysmën e distancës dhe arrijmë në kundërshti me pabarazinë trekëndore.

Meqë $a \neq b$, kemi $d(a,b) > 0$; marrim $r = \frac{d(a,b)}{2} > 0$. Supozojmë se ekziston $x \in B_d(a,r) \cap B_d(b,r)$. Atëherë

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < r + r = d(a,b),$$

kundërshti. Pra $B_d(a,r) \cap B_d(b,r) = \varnothing$. Kjo veti do të quhet më vonë *vetia e Hausdorff-it.* □

Ushtrimi 3.2.6 (argumentues)**.** Vërtetoni se në çdo hapësirë metrike çdo bashkësi e fundme është e mbyllur.

***Zgjidhje**. Metoda.* Vërtetojmë rastin e një pike dhe kalojmë te bashkimi i fundëm me ligjet e De Morganit.

Një pikë. Le të jetë $a \in X$ dhe $x \in X \setminus \{a\}$. Atëherë $r = d(a,x) > 0$ dhe $a \notin B_d(x,r)$, sepse $d(x,a) = r \not< r$. Pra $B_d(x,r) \subseteq X \setminus \{a\}$, dhe $X \setminus \{a\}$ është e hapur.

Bashkësi e fundme. Le të jetë $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Sipas ligjeve të De Morganit (Kapitulli 1, Teorema 1.7),

$$X \setminus F = \bigcap_{k=1}^{n} \big(X \setminus \{a_k\}\big),$$

që është prerje e fundme bashkësish të hapura, pra e hapur sipas Teoremës 3.2.10. (Për $X = \mathbb{R}$ me metrikën e zakonshme, ky është Ushtrimi 2.4(b) i Kapitullit 2.) Për $F = \varnothing$, komplementi është X, i hapur. Pra F është e mbyllur. □

3.2.5. Pyetje për vetëkontroll

1. A është çdo top i hapur bashkësi e hapur? Cila veti e metrikës përdoret në vërtetim?
2. Si ndryshon forma e topit të hapur në $\mathbb{R}^2$ për metrikat d_1, d_2 dhe d_∞?
3. Pse bashkimi i një familjeje të çfarëdoshme bashkësish të hapura është i hapur?
4. Në cilin hap të vërtetimit të Teoremës 3.2.10 përdoret fakti që familja është e fundme?
5. A përputhet gjithmonë topi i mbyllur me mbylljen e topit të hapur? Jepni një shembull.

Lidhja me leksionin pasues. *Në Leksionin 3.3 do të studiohet më tej topologjia e induktuar nga metrika dhe bazat e saj, duke përdorur vetitë e vërtetuara këtu: topat e hapur (Pohimi 3.2.9) do të jenë shembulli i parë i një baze të topologjisë.*

Literatura orientuese

[1] J. R. Munkres, *Topology*, botimi i 2-të, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.

[2] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading, 1970.