UNIVERSITETI I SHKODRËS “LUIGJ GURAKUQI”

Fakulteti i Shkencave të Natyrës · Bachelor në Matematikë · Viti III

TOPOLOGJI

Kapitulli 3 · Hapësirat metrike

Leksioni 3.1 · Metrika: përkufizimi dhe shembujt themelorë

Prof. As. Dr. Siditë Duraj · 2026–2027

Qëllimi. Në Kapitullin 2, bashkësitë e hapura u përkufizuan në mënyrë abstrakte. Në shumë situata ato lindin nga një nocion i distancës. Ky leksion e formalizon distancën si *metrikë* dhe paraqet shembujt që do të përdoren në gjithë Kapitullin 3.

Rezultatet e të nxënit. Në përfundim të leksionit, studenti është në gjendje:

(1) të formulojë aksiomat e metrikës dhe të verifikojë nëse një funksion i dhënë është metrikë;

(2) të gjejë një kundërshembull kur një funksion nuk është metrikë, duke treguar aksiomën që dështon;

(3) të llogarisë distancat sipas metrikave d_1, d_2, d_∞ në $\mathbb{R}^n$ dhe të krahasojë vlerat e tyre;

(4) të vërtetojë pabarazinë trekëndore të anasjelltë dhe ta përdorë në vlerësime.

Njohuritë paraprake. Vlera absolute dhe vetitë e saj (Analiza Matematike), mosbarazimi i Cauchy-Schwarz-it në $\mathbb{R}^n$ (Algjebra Lineare) dhe nocioni i funksionit injektiv (Kapitulli 1, Përkufizimi 1.9).

3.1.1. Metrika dhe hapësira metrike

Përkufizimi 3.1.1 (Metrika dhe hapësira metrike)**.** Le të jetë X një bashkësi jo boshe. Një funksion $d\colon X \times X \to [0,\infty)$ quhet *metrikë* në X nëse, për çdo $x, y, z \in X$:

(M1) $d(x,y) = 0$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $x = y$;

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ (simetria);

(M3) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ (pabarazia trekëndore).

Çifti (X,d) quhet *hapësirë metrike*, ndërsa $d(x,y)$ *distanca* ndërmjet x dhe y.

Vërejtje 3.1.2. Kushti $d(x,y) \ge 0$ është i përfshirë në bashkësinë e vlerave $[0,\infty)$; disa autorë e shkruajnë si aksiomë më vete. Ai në fakt rrjedh nga (M1)–(M3): për $z = x$, pabarazia trekëndore dhe simetria japin $0 = d(x,x) \le d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y)$. Nga (M1), distanca ndërmjet dy pikave të ndryshme është rreptësisht pozitive.

Pohimi 3.1.3 (Pabarazia trekëndore e anasjelltë)**.** *Për çdo x,y,z në një hapësirë metrike (X,d) vlen*

$$\big|d(x,z) - d(y,z)\big| \le d(x,y).$$

Vërtetim. Nga pabarazia trekëndore, $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$, pra $d(x,z) - d(y,z) \le d(x,y)$. Duke ndërruar rolet e x dhe y dhe duke përdorur simetrinë, $d(y,z) \le d(y,x) + d(x,z) = d(x,y) + d(x,z)$, pra $d(y,z) - d(x,z) \le d(x,y)$. Dy mosbarazimet së bashku japin $\big|d(x,z) - d(y,z)\big| \le d(x,y)$. ■

3.1.2. Shembuj themelorë

Shembulli 3.1.4 (Metrika e zakonshme në $\mathbb{R}$)**.** Për $x,y \in \mathbb{R}$ vendosim $d(x,y) = |x-y|$. Aksiomat (M1) dhe (M2) rrjedhin nga vetitë e vlerës absolute; pabarazia trekëndore rrjedh nga

$$|x-z| = \big|(x-y) + (y-z)\big| \le |x-y| + |y-z|.$$

Shembulli 3.1.5 (Metrika diskrete)**.** Në çdo bashkësi jo boshe X përkufizojmë

$$d_{\text{dis}}(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \ne y. \end{cases}$$

(M1) dhe (M2) janë të menjëhershme. Për (M3): nëse $x = z$, ana e majtë është 0. Nëse $x \ne z$, atëherë të paktën njëra nga $x \ne y$ ose $y \ne z$ vlen (përndryshe $x = y = z$), prandaj $d_{\text{dis}}(x,y) + d_{\text{dis}}(y,z) \ge 1 = d_{\text{dis}}(x,z)$.

Për metrikën euklidiane na nevojitet një fakt nga Algjebra Lineare.

Fakt 3.1.6 (Mosbarazimi i Cauchy-Schwarz-it, nga Algjebra Lineare)**.** *Për çdo $a = (a_1,\dots,a_n)$ dhe $b = (b_1,\dots,b_n)$ në $\mathbb{R}^n$,*

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Teorema 3.1.7 (Tri metrika në $\mathbb{R}^n$)**.** *Për $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dhe $y = (y_1, \ldots, y_n)$ në $\mathbb{R}^n$, funksionet*

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \qquad d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \qquad d_\infty(x,y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$$

janë metrika në $\mathbb{R}^n$. Metrika d_2 quhet euklidiane.

Vërtetim. Për të tri funksionet, (M1) vlen sepse një shumë, një rrënjë ose një maksimum i numrave jonegativë $|x_i - y_i|$ është 0 atëherë dhe vetëm atëherë kur të gjithë këta numra janë 0, pra kur $x = y$; (M2) vlen sepse $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$. Mbetet (M3). Le të jenë $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Për d_1: duke mbledhur $|x_i - z_i| \le |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$ për $i = 1, \ldots, n$ përftojmë $d_1(x,z) \le d_1(x,y) + d_1(y,z)$.

Për d_∞: për çdo i, $|x_i - z_i| \le |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \le d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z)$; duke marrë maksimumin sipas i, përftojmë $d_\infty(x,z) \le d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z)$.

Për d_2: vendosim $a_i = x_i - y_i$ dhe $b_i = y_i - z_i$, pra $a_i + b_i = x_i - z_i$. Sipas Faktit 3.1.6,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \le \left(\sqrt{\textstyle\sum} a_i^2 + \sqrt{\textstyle\sum} b_i^2 \right)^2.$$

Duke nxjerrë rrënjën katrore nga të dyja anët, $d_2(x,z) \le d_2(x,y) + d_2(y,z)$. ■

Pohimi 3.1.8 (Krahasimi i tri metrikave)**.** *Për çdo $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$d_\infty(x,y) \le d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le n\, d_\infty(x,y).$$

Vërtetim. Shënojmë $t_i = |x_i - y_i| \ge 0$ dhe $M = \max_i t_i = d_\infty(x,y)$. (i) $M^2 \le \sum_i t_i^2$, pra $M \le d_2(x,y)$. (ii) $\left(\sum_i t_i\right)^2 = \sum_i t_i^2 + 2\sum_{i<j} t_i t_j \ge \sum_i t_i^2$, pra $d_2(x,y) \le d_1(x,y)$. (iii) $\sum_i t_i \le nM$. ■

Shembulli 3.1.9 (E njëjta bashkësi, distanca të ndryshme)**.** Në $\mathbb{R}^2$, për $x = (0,0)$ dhe $y = (1,1)$:

$$d_1(x,y) = 2, \qquad d_2(x,y) = \sqrt{2}, \qquad d_\infty(x,y) = 1,$$

në përputhje me Pohimin 3.1.8. Gjeometrikisht (Figura 3.1.1), d_2 mat segmentin e drejtë, d_1 gjatësinë e një rruge me segmente paralele me boshtet, ndërsa d_∞ ndryshimin më të madh të koordinatave.

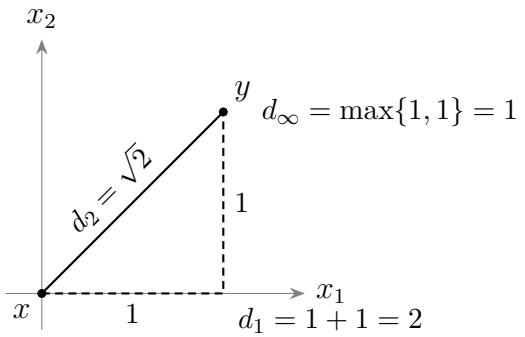


Figura 3.1.1. Distancat ndërmjet $x = (0,0)$ dhe $y = (1,1)$: segmenti i drejtë jep d_2, rruga e ndërprerë paralel me boshtet jep d_1, ndërsa d_∞ është ndryshimi më i madh i koordinatave.

3.1.3. Si verifikohet një metrikë?

Për të vërtetuar se një funksion d është metrikë, kontrollojmë me radhë: (1) që vlerat janë jonegative; (2) që vlera 0 merret vetëm kur pikat janë të njëjta; (3) simetrinë; (4) pabarazinë trekëndore. Për të treguar se d *nuk* është metrikë, mjafton një kundërshembull për një aksiomë të vetme.

Shembulli 3.1.10 (Një funksion që nuk është metrikë)**.** Në $\mathbb{R}$, funksioni $\rho(x,y) = (x-y)^2$ plotëson (M1) dhe (M2), por jo pabarazinë trekëndore: për $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$,

$$\rho(0,2) = 4 > 2 = 1 + 1 = \rho(0,1) + \rho(1,2).$$

Pohimi 3.1.11 (Shumëzimi me një konstante pozitive)**.** *Nëse d është metrikë në X dhe $c > 0$, atëherë $\delta(x,y) = c\,d(x,y)$ është metrikë në X.*

Vërtetim. Meqë $c > 0$, $\delta(x,y) = 0$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $d(x,y) = 0$, pra kur $x = y$. Simetria ruhet. Duke shumëzuar $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ me $c > 0$ përftojmë $\delta(x,z) \le \delta(x,y) + \delta(y,z)$. ■

Lidhja me Kapitullin 2. *Çdo metrikë d do të përcaktojë një topologji τ_d në X (Leksioni 3.2). Për metrikën e zakonshme në $\mathbb{R}$ kjo do të jetë topologjia e zakonshme (Kapitulli 2, Përkufizimi 2.7), ndërsa për metrikën diskrete do të jetë topologjia diskrete (Kapitulli 2, Shembulli 2.3).*

3.1.4. Ushtrime të zgjidhura

Çdo ushtrim (në kornizë) pasohet nga zgjidhja e plotë, e cila fillon me metodën; fundi i saj shënohet me □.

Ushtrimi 3.1.1 (bazë)**.** Në $\mathbb{R}$ me metrikën e zakonshme, gjeni $d(-2,3)$ dhe $d\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

Zgjidhje*. Metoda.* Zbatojmë drejtpërdrejt përkufizimin $d(x,y)=|x-y|$.

$$d(-2,3)=|-2-3|=5, \qquad d\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)=\left|\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right|=2.$$

□

Ushtrimi 3.1.2 (bazë)**.** Në $\mathbb{R}^2$, gjeni $d_1(x,y)$, $d_2(x,y)$ dhe $d_\infty(x,y)$ për $x=(1,-1)$ dhe $y=(4,3)$, dhe kontrolloni Pohimin 3.1.8.

Zgjidhje*. Metoda.* Gjejmë ndryshimet absolute të koordinatave dhe i kombinojmë sipas secilës metrikë.

Ndryshimet janë $|1-4|=3$ dhe $|-1-3|=4$. Prandaj

$$d_1(x,y)=3+4=7, \qquad d_2(x,y)=\sqrt{3^2+4^2}=5, \qquad d_\infty(x,y)=\max\{3,4\}=4,$$

dhe vërtet $4\le 5\le 7\le 2\cdot 4$. □

Ushtrimi 3.1.3 (mesatar)**.** Vendosni nëse $d(x,y)=|x^2-y^2|$ është metrikë në $\mathbb{R}$ dhe në $[0,\infty)$.

Zgjidhje*. Metoda.* Kontrollojmë (M1), aksiomën që varet nga injektiviteti i $x\mapsto x^2$; (M2) dhe (M3) vlejnë për çdo funksion të trajtës $|f(x)-f(y)|$.

Në $\mathbb{R}$: $d(1,-1)=|1-1|=0$, ndërsa $1\neq -1$; aksioma (M1) dështon, pra d nuk është metrikë. Në $[0,\infty)$: funksioni $f(x)=x^2$ është injektiv, prandaj $d(x,y)=0 \iff x^2=y^2 \iff x=y$. Simetria është e qartë, dhe $|x^2-z^2|\le|x^2-y^2|+|y^2-z^2|$ është pabarazia trekëndore e vlerës absolute për numrat x^2,y^2,z^2. Pra d është metrikë në $[0,\infty)$. □

Ushtrimi 3.1.4 (mesatar)**.** Le të jetë d metrikë në X. Vërtetoni se $\delta(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ është metrikë në X.

***Zgjidhje**. Metoda.* Shkruajmë $\delta = f \circ d$ me $f(t) = \frac{t}{1+t}$ dhe përdorim dy veti të f: është rritëse dhe nënaditive.

(M1) dhe (M2): $\delta(x,y) = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$, dhe simetria trashëgohet nga d.

Për $t \geq 0$, funksioni $f(t) = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$ është rritës. Për $a, b \geq 0$,

$$f(a+b) - f(a) = \frac{a+b}{1+a+b} - \frac{a}{1+a} = \frac{b}{(1+a)(1+a+b)} \leq \frac{b}{1+b} = f(b),$$

sepse $(1+a)(1+a+b) \geq 1+b$. Pra $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$. Duke përdorur pabarazinë trekëndore për d dhe rritjen e f:

$$\delta(x,z) = f\big(d(x,z)\big) \leq f\big(d(x,y) + d(y,z)\big) \leq f\big(d(x,y)\big) + f\big(d(y,z)\big) = \delta(x,y) + \delta(y,z).$$

□

Ushtrimi 3.1.5 (argumentues)**.** Le të jetë d metrikë në X. Vërtetoni se $\delta(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ është metrikë në X.

***Zgjidhje**. Metoda.* Si në Ushtrimin 3.1.4: funksioni $t \mapsto \min\{1,t\}$ është rritës dhe nënaditiv në $[0,\infty)$.

(M1) dhe (M2) trashëgohen nga d, sepse $\min\{1,t\} = 0 \iff t = 0$. Për $a, b \geq 0$ vlen $\min\{1, a+b\} \leq \min\{1,a\} + \min\{1,b\}$: nëse $a \geq 1$ ose $b \geq 1$, ana e djathtë është të paktën 1, ndërsa ana e majtë është të shumtën 1; përndryshe ana e djathtë është $a + b \geq \min\{1, a+b\}$. Prandaj

$$\delta(x,z) \leq \min\{1, d(x,y) + d(y,z)\} \leq \delta(x,y) + \delta(y,z).$$

□

Ushtrimi 3.1.6 (argumentues)**.** Le të jetë $f\colon X \to \mathbb{R}$ një funksion. Vërtetoni se $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ është metrikë në X atëherë dhe vetëm atëherë kur f është injektiv. Zbatim: $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$ është metrikë në $\mathbb{R}$.

***Zgjidhje**. Metoda.* (M2) dhe (M3) vlejnë gjithmonë për këtë trajtë; (M1) është e barasvlershme me injektivitetin.

Simetria është e qartë, dhe $|f(x) - f(z)| \le |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)|$ është pabarazia trekëndore e vlerës absolute. Për (M1): gjithmonë $d(x,x) = 0$, dhe $d(x,y) = 0 \iff f(x) = f(y)$. Pra kushti "$d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$" është pikërisht injektiviteti i f. Funksioni arctan është rreptësisht rritës në $\mathbb{R}$, pra injektiv; prandaj $|\arctan x - \arctan y|$ është metrikë në $\mathbb{R}$. (Ushtrimi 3.1.3 është rasti $f(x) = x^2$.) □

3.1.5. Pyetje për vetëkontroll

1. Pse kushti $d(x,y) \ge 0$ nuk mjafton për të përcaktuar një metrikë?
2. Çfarë roli luan pabarazia trekëndore në vërtetimet e leksionit?
3. Jepni një shembull bashkësie që nuk është nënbashkësi e $\mathbb{R}^n$, por që mund të pajiset me metrikë.
4. A është $d(x,y) = |x-y|^2$ metrikë në $\mathbb{R}$? Cila aksiomë dështon?
5. Pse metrikat d_1, d_2 dhe d_∞ japin vlera të ndryshme për të njëjtin çift pikash, dhe si renditen këto vlera?

Lidhja me leksionin pasues. *Në Leksionin 3.2, metrika do të përdoret për të përkufizuar topat e hapur, fqinjësitë dhe bashkësitë e hapura, dhe për të treguar se këto të fundit formojnë një topologji në kuptimin e Kapitullit 2. Pohimi 3.1.8 do të shpjegojë pse topat e d_1, d_2 dhe d_∞ janë të përfshirë njëri në tjetrin.*

Literatura orientuese

[1] J. R. Munkres, *Topology*, botimi i 2-të, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.

[2] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading, 1970.