UNIVERSITETI I SHKODRËS “LUIGJ GURAKUQI”

Fakulteti i Shkencave të Natyrës

Programi: Bachelor në Matematikë · Viti III

TOPOLOGJI

Kapitulli 2

Hapësirat topologjike

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Material mësimor universitar

Viti akademik 2026–2027

KAPITULLI 2

Hapësirat topologjike

Qëllimi. Në Analizën Matematike, bashkësitë e hapura të $\mathbb{R}$ përkufizohen me anë të distancës. Ky kapitull i shkëput ato nga distanca: një *topologji* në një bashkësi X është thjesht një familje nënbashkësish që sillet ndaj bashkimeve dhe prerjeve si bashkësitë e hapura të $\mathbb{R}$. Mbi këtë nocion do të ndërtohen vazhdueshmëria, konvergjenca dhe hapësirat metrike të Kapitullit 3.

Rezultatet e të nxënit. Në përfundim të kapitullit, studenti është në gjendje:

(1) të verifikojë nëse një familje nënbashkësish është topologji, duke kontrolluar secilën aksiomë ose duke gjetur kundërshembull;

(2) të përshkruajë bashkësitë e hapura dhe të mbyllura për topologjinë diskrete, antidiskrete, të zakonshme, kofinite dhe të gjysmëdrejtëzave;

(3) të krahasojë dy topologji në të njëjtën bashkësi dhe të argumentojë kur ato janë të pakrahasueshme;

(4) të vërtetojë nëse një familje është bazë ose nënbazë dhe të përshkruajë topologjinë që ajo gjeneron;

(5) të karakterizojë bashkësitë e hapura me anë të fqinjësive.

Njohuritë paraprake. Përdoren familjet e indeksuara dhe konventat për familjen boshe (Përkufizimi 1.3, Vërejtja 1.4), ligjet e De Morganit (Teorema 1.7) dhe numërueshmëria e $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (Rrjedhimet 1.28 dhe 1.31) nga Kapitulli 1, si dhe vetia e Arkimedit dhe dendësia e $\mathbb{Q}$ në $\mathbb{R}$ nga Analiza Matematike.

Konventat. X është një bashkësi çfarëdo (e fundme ose e pafundme) dhe $\mathcal{P}(X)$ është bashkësia e të gjitha nënbashkësive të saj. Bashkimi i familjes boshe është $\varnothing$, prerja e familjes boshe të nënbashkësive të X është X.

2.1. Përkufizimi dhe aksiomat e topologjisë

Përkufizimi 2.1. Një *topologji* në bashkësinë X është një familje $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ që plotëson aksiomat:

(T1) $\varnothing \in \tau$ dhe $X \in \tau$;

(T2) për çdo familje $(U_i)_{i\in I}$ elementesh të τ, kemi $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$;

(T3) për çdo $n \in \mathbb{N}$ dhe çdo $U_1, \ldots, U_n \in \tau$, kemi $\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \tau$.

Çifti (X, τ) quhet *hapësirë topologjike*; elementet e τ quhen *bashkësi të hapura* të (X, τ).

Vërejtje 2.2. (a) Aksioma (T3) kërkon mbyllje vetëm ndaj prerjeve të *fundme*. Kjo është e domosdoshme: për bashkësitë e hapura të $\mathbb{R}$, prerja e familjes së pafundme $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, është $\{0\}$, e cila nuk është e hapur (Kapitulli 1, Shembulli 1.6).

(b) Me konventat për familjen boshe, (T1) mund të shihet si rast i veçantë i (T2) dhe (T3): $\varnothing$ është bashkimi i familjes boshe dhe X është prerja e saj. Megjithatë, aksioma (T1) shkruhet shprehimisht, sepse (T3) është formuluar për $n \geq 1$.

(c) Nga (T3), me induksion, mjafton të kontrollohet prerja e *dy* bashkësive: nëse $U \cap V \in \tau$ për çdo $U, V \in \tau$, atëherë $U_1 \cap \cdots \cap U_n = (U_1 \cap \cdots \cap U_{n-1}) \cap U_n \in \tau$.

Shembulli 2.3 (Topologjia diskrete dhe antidiskrete)**.** (a) Familja $\tau_{\text{dis}} = \mathcal{P}(X)$ është topologji, sepse bashkimi dhe prerja e nënbashkësive të X janë përsëri nënbashkësi të X. Në këtë topologji, *diskrete*, çdo nënbashkësi është e hapur.

(b) Familja $\tau_{\text{ad}} = \{\varnothing, X\}$ është topologji, e quajtur *antidiskrete*: bashkimi ose prerja e elementeve të saj është përsëri $\varnothing$ ose X.

Shembulli 2.4 (Një topologji në një bashkësi me tre elemente)**.** Për $X = \{a, b, c\}$, familja $\tau = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, X\}$ është topologji. Elementet e saj formojnë një zinxhir: $\varnothing \subseteq \{a\} \subseteq \{a, b\} \subseteq X$. Për çdo nënfamilje jo boshe, bashkimi është elementi më i madh dhe prerja elementi më i vogël i saj, të dy në τ; nënfamilja boshe jep $\varnothing$ dhe X, që janë në τ sipas (T1).

Shembulli 2.5 (Familje që nuk është topologji)**.** Në $X = \{a, b, c\}$, familja $\mathcal{F} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, X\}$ nuk është topologji, sepse $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \mathcal{F}$: aksioma (T2) nuk plotësohet.

Teorema 2.6. *Për çdo topologji τ në X vlen $\tau_{\text{ad}} \subseteq \tau \subseteq \tau_{\text{dis}}$.*

Vërtetim. Sipas (T1), $\varnothing, X \in \tau$, pra $\tau_{\text{ad}} \subseteq \tau$. Sipas përkufizimit, $\tau \subseteq \mathcal{P}(X) = \tau_{\text{dis}}$. ■

2.2. Topologjia e zakonshme dhe shembuj të tjerë

Përkufizimi 2.7. *Topologjia e zakonshme* e $\mathbb{R}$ është familja τ_{zak} e të gjitha bashkësive $U \subseteq \mathbb{R}$ të tilla që

$$\forall\, x \in U \;\; \exists\, \varepsilon > 0 : \;\; (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U.$$

Teorema 2.8. *Familja τ_{zak} është topologji në $\mathbb{R}$.*

Vërtetim. (T1) Për $\varnothing$ kushti plotësohet, sepse nuk ka asnjë pikë për të kontrolluar; për $\mathbb{R}$ çdo $\varepsilon > 0$ shërben.

(T2) Le të jetë $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ me $U_i \in \tau_{\text{zak}}$ dhe $x \in U$. Atëherë $x \in U_j$ për ndonjë $j \in I$, dhe ekziston $\varepsilon > 0$ me $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U_j \subseteq U$.

(T3) Le të jenë $U_1, \ldots, U_n \in \tau_{\text{zak}}$ dhe $x \in U_1 \cap \cdots \cap U_n$. Për çdo k ekziston $\varepsilon_k > 0$ me $(x-\varepsilon_k, x+\varepsilon_k) \subseteq U_k$. Numri $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ është pozitiv, dhe $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U_k$ për çdo k. ■

Në Kapitullin 3 do të shihet se ky është rasti i veçantë $d(x,y) = |x-y|$ i topologjisë së induktuar nga një metrikë.

Përkufizimi 2.9. *Topologjia kofinite* në një bashkësi X është

$$\tau_{\text{kof}} = \{\varnothing\} \cup \{U \subseteq X : \ X \setminus U \text{ është e fundme}\}.$$

Teorema 2.10. *Familja τ_{kof} është topologji në X. Nëse X është e fundme, $\tau_{\text{kof}} = \tau_{\text{dis}}$.*

Vërtetim. (T1) $\varnothing \in \tau_{\text{kof}}$ sipas përkufizimit, dhe $X \in \tau_{\text{kof}}$, sepse $X \setminus X = \varnothing$ është e fundme.

(T2) Le të jetë $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ me $U_i \in \tau_{\text{kof}}$. Nëse të gjitha U_i janë boshe (ose $I = \varnothing$), atëherë $U = \varnothing \in \tau_{\text{kof}}$. Përndryshe, ekziston j me $U_j \neq \varnothing$, prandaj $X \setminus U_j$ është e fundme. Sipas ligjeve të De Morganit (Teorema 1.7),

$$X \setminus U = \bigcap_{i\in I}(X \setminus U_i) \subseteq X \setminus U_j,$$

dhe një nënbashkësi e një bashkësie të fundme është e fundme. Pra $U \in \tau_{\text{kof}}$.

(T3) Le të jenë $U_1, \ldots, U_n \in \tau_{\text{kof}}$. Nëse ndonjëra prej tyre është boshe, prerja është boshe. Përndryshe, çdo $X \setminus U_k$ është e fundme dhe

$$X \setminus \bigcap_{k=1}^{n} U_k = \bigcup_{k=1}^{n}(X \setminus U_k)$$

është bashkim i fundëm bashkësish të fundme, pra e fundme.

Nëse X është e fundme, atëherë çdo $U \subseteq X$ ka komplement të fundëm, prandaj $\tau_{\text{kof}} = \mathcal{P}(X)$. ■

Shembulli 2.11 (Topologjia e gjysmëdrejtëzave)**.** Në $\mathbb{R}$ shqyrtojmë $\tau_+ = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{(a,\infty) : \ a \in \mathbb{R}\}$. Kjo familje është topologji.

(T2) Le të jetë $\mathcal{A} \subseteq \tau_+$ dhe $U = \bigcup \mathcal{A}$. Nëse $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$, atëherë $U = \mathbb{R}$; nëse $\mathcal{A}$ nuk përmban asnjë gjysmëdrejtëz, atëherë $U = \varnothing$. Le të jetë tani $A = \{a \in \mathbb{R} : \ (a, \infty) \in \mathcal{A}\} \neq \varnothing$ dhe $\mathbb{R} \notin \mathcal{A}$. Nëse A nuk është e kufizuar nga poshtë, atëherë $U = \mathbb{R}$. Përndryshe, le të jetë $s = \inf A$; pohojmë se $U = (s, \infty)$. Vërtet, nëse $x > s$, sipas përkufizimit të infimumit ekziston $a \in A$ me $a < x$, pra $x \in (a, \infty) \subseteq U$; nëse $x \leq s$, atëherë $x \leq a$ për çdo $a \in A$, dhe x nuk i përket asnjë gjysmëdrejtëze të $\mathcal{A}$.

(T3) Nëse njëra nga bashkësitë është $\varnothing$, prerja është boshe; bashkësitë e barabarta me $\mathbb{R}$ nuk ndikojnë në prerje; dhe $(a_1, \infty) \cap \cdots \cap (a_n, \infty) = \big(\max\{a_1, \ldots, a_n\}, \infty\big)$.

2.3. Bashkësitë e mbyllura

Përkufizimi 2.12. Në një hapësirë topologjike (X, τ), bashkësia $F \subseteq X$ quhet *e mbyllur* nëse $X \setminus F \in \tau$.

Vërejtje 2.13. "E mbyllur" nuk është e kundërta e "e hapur". Një bashkësi mund të jetë njëkohësisht e hapur dhe e mbyllur (p.sh. $\varnothing$ dhe X në çdo hapësirë), ose as e hapur as e mbyllur (Ushtrimi 2.3).

Teorema 2.14 (Aksiomat duale)**.** *Në çdo hapësirë topologjike (X, τ):*

(i) $\varnothing$ dhe X janë të mbyllura;

(ii) prerja e çdo familjeje bashkësish të mbyllura është e mbyllur;

(iii) bashkimi i çdo familjeje të fundme bashkësish të mbyllura është i mbyllur.

Vërtetim. (i) Komplementet e $\varnothing$ dhe X janë përkatësisht X dhe $\varnothing$, të hapura sipas (T1).

(ii) Nëse F_i, $i \in I$, janë të mbyllura, sipas ligjeve të De Morganit (Teorema 1.7)

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i) \in \tau$$

sipas (T2).

(iii) Nëse $F_1, \ldots, F_n$ janë të mbyllura, atëherë

$$X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} F_k = \bigcap_{k=1}^{n} (X \setminus F_k) \in \tau$$

sipas (T3). Për familjen boshe, bashkimi është $\varnothing$, i mbyllur sipas (i). ■

Shembulli 2.15. (a) Në $(\mathbb{R}, \tau_{\text{zak}})$, bashkësia $[0, 1]$ është e mbyllur, sepse $\mathbb{R} \setminus [0, 1] = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ është e hapur: për $x < 0$ mjafton $\varepsilon = -x$, për $x > 1$ mjafton

$\varepsilon = x - 1$. Bashkësia $(0, 1)$ është e hapur. Bashkësia $[0, 1)$ nuk është as e hapur as e mbyllur (Ushtrimi 2.3).

(b) Në (X, τ_{kof}) me X të pafundme, bashkësitë e mbyllura janë pikërisht bashkësitë e fundme dhe X.

(c) Në (X, τ_{dis}) çdo bashkësi është njëkohësisht e hapur dhe e mbyllur; në (X, τ_{ad}) bashkësitë e mbyllura janë vetëm $\varnothing$ dhe X.

2.4. Krahasimi i topologjive

Përkufizimi 2.16. Le të jenë τ_1 dhe τ_2 topologji në të njëjtën bashkësi X. Nëse $\tau_1 \subseteq \tau_2$, themi se τ_2 është *më e imët* se τ_1 dhe se τ_1 është *më e trashë* se τ_2. Nëse asnjëra nuk përmbahet në tjetrën, topologjitë quhen *të pakrahasueshme*.

Shembulli 2.17. (a) Sipas Teoremës 2.6, në çdo bashkësi topologjia antidiskrete është më e trasha dhe ajo diskrete më e imta.

(b) Në $\mathbb{R}$, $\tau_{\text{kof}} \subseteq \tau_{\text{zak}}$: nëse $U \in \tau_{\text{kof}}$ dhe $U \neq \varnothing$, atëherë $\mathbb{R} \setminus U$ është e fundme, pra e mbyllur në τ_{zak} (Ushtrimi 2.4), dhe U është e hapur në τ_{zak}. Përfshirja është strikte (Ushtrimi 2.4).

(c) Në $X = \{a, b\}$, topologjitë $\{\varnothing, \{a\}, X\}$ dhe $\{\varnothing, \{b\}, X\}$ janë të pakrahasueshme.

Teorema 2.18. *Prerja $\bigcap_{\alpha \in A} \tau_\alpha$ e një familjeje jo boshe topologjish në X është topologji në X.*

Vërtetim. Le të jetë $\tau = \bigcap_{\alpha \in A} \tau_\alpha$. (T1) $\varnothing$ dhe X i përkasin çdo τ_α, pra edhe τ-së. (T2) Nëse $U_i \in \tau$ për çdo $i \in I$, atëherë $U_i \in \tau_\alpha$ për çdo i dhe çdo α; meqë çdo τ_α është topologji, $\bigcup_i U_i \in \tau_\alpha$ për çdo α, pra $\bigcup_i U_i \in \tau$. (T3) Arsyetohet njësoj për prerjet e fundme. Kushti $A \neq \varnothing$ nevojitet, që prerja të merret brenda $\mathcal{P}(X)$. ■

Rrjedhimi 2.19. *Për çdo familje $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ekziston një topologji më e trashë se të gjitha topologjitë që përmbajnë $\mathcal{A}$, e cila e përmban vetë $\mathcal{A}$: prerja e të gjitha topologjive në X që përmbajnë $\mathcal{A}$. Ajo quhet* topologjia e gjeneruar *nga $\mathcal{A}$.*

Vërtetim. Familja e topologjive që përmbajnë $\mathcal{A}$ është jo boshe, sepse përmban $\tau_{\text{dis}} = \mathcal{P}(X)$. Sipas Teoremës 2.18, prerja e saj është topologji; ajo përmban $\mathcal{A}$ dhe përmbahet në çdo topologji që përmban $\mathcal{A}$. ■

Vërejtje 2.20. Bashkimi i dy topologjive nuk është domosdoshmërisht topologji. Për $X = \{a, b, c\}$, $\tau_1 = \{\varnothing, \{a\}, X\}$ dhe $\tau_2 = \{\varnothing, \{b\}, X\}$ janë topologji, por $\{a\}, \{b\} \in \tau_1 \cup \tau_2$, ndërsa $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$.

2.5. Bazat e një topologjie

Përkufizimi 2.21. Një familje $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ quhet *bazë* (për një topologji në X) nëse:

(B1) për çdo $x \in X$ ekziston $B \in \mathcal{B}$ me $x \in B$;

(B2) për çdo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ dhe çdo $x \in B_1 \cap B_2$ ekziston $B_3 \in \mathcal{B}$ me $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Teorema 2.22 (Topologjia e gjeneruar nga një bazë)**.** *Nëse $\mathcal{B}$ plotëson (B1) dhe (B2), atëherë familja*

$$\tau_{\mathcal{B}} = \Big\{ \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B : \ \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \Big\}$$

e të gjitha bashkimeve të elementeve të $\mathcal{B}$ është topologji në X, dhe $\mathcal{B} \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$.

Vërtetim. (T1) Për $\mathcal{C} = \varnothing$ përftojmë $\varnothing \in \tau_{\mathcal{B}}$. Për $\mathcal{C} = \mathcal{B}$, sipas (B1), bashkimi është X.

(T2) Një bashkim bashkimesh elementesh të $\mathcal{B}$ është përsëri bashkim elementesh të $\mathcal{B}$: nëse $U_i = \bigcup \mathcal{C}_i$, atëherë $\bigcup_i U_i = \bigcup \big(\bigcup_i \mathcal{C}_i \big)$.

(T3) Sipas Vërejtjes 2.2(c), mjafton prerja e dy bashkësive. Le të jenë $U, V \in \tau_{\mathcal{B}}$ dhe $x \in U \cap V$. Ekzistojnë $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ me $x \in B_1 \subseteq U$ dhe $x \in B_2 \subseteq V$; sipas (B2) ekziston $B_x \in \mathcal{B}$ me $x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V$. Atëherë

$$U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} B_x \in \tau_{\mathcal{B}},$$

sepse çdo B_x përmbahet në $U \cap V$ dhe çdo $x \in U \cap V$ i përket B_x. Së fundi, çdo $B \in \mathcal{B}$ është bashkimi i familjes $\{B\}$, pra $\mathcal{B} \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$. ■

Themi se $\mathcal{B}$ është *bazë e topologjisë* τ nëse $\tau = \tau_{\mathcal{B}}$.

Teorema 2.23 (Kriteri lokal)**.** *Le të jetë $\mathcal{B}$ bazë e topologjisë τ. Bashkësia $U \subseteq X$ është e hapur atëherë dhe vetëm atëherë kur për çdo $x \in U$ ekziston $B \in \mathcal{B}$ me $x \in B \subseteq U$.*

Vërtetim. ($\Rightarrow$) Nëse $U = \bigcup \mathcal{C}$ me $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ dhe $x \in U$, atëherë $x \in B$ për ndonjë $B \in \mathcal{C}$, dhe $B \subseteq U$.

($\Leftarrow$) Le të jetë $\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{B} : \ B \subseteq U\}$. Atëherë $\bigcup \mathcal{C} \subseteq U$, dhe sipas hipotezës çdo $x \in U$ i përket ndonjë elementi të $\mathcal{C}$. Pra $U = \bigcup \mathcal{C} \in \tau$. ■

Shembulli 2.24 (Intervalet e hapura)**.** Familja $\mathcal{B} = \{(a, b) : \ a, b \in \mathbb{R}, \ a < b\}$ është bazë e topologjisë së zakonshme.

(B1) dhe (B2). Çdo x i përket $(x - 1, x + 1)$. Nëse $x \in (a, b) \cap (c, d)$, atëherë $x \in \big(\max\{a, c\}, \min\{b, d\} \big) = (a, b) \cap (c, d)$.

$\tau_{\mathcal{B}} = \tau_{\text{zak}}$. Çdo interval (a, b) është i hapur në τ_{zak}: për $x \in (a, b)$ mjafton $\varepsilon = \min\{x - a, b - x\}$. Pra $\tau_{\mathcal{B}} \subseteq \tau_{\text{zak}}$ sipas (T2). Anasjelltas, nëse $U \in \tau_{\text{zak}}$, atëherë për çdo $x \in U$ ekziston $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \in \mathcal{B}$ me $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U$; sipas argumentit të Teoremës 2.23, U është bashkim elementesh të $\mathcal{B}$.

Shembulli 2.25 (Një bazë e numërueshme)**.** Familja $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}} = \{(p, q) : \ p, q \in \mathbb{Q},\ p < q\}$ është gjithashtu bazë e τ_{zak}, dhe ajo është e numërueshme. Të dyja pohimet janë vërtetuar në Kapitullin 1 (Ushtrimi 1.13): $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}$ është e numërueshme sipas numërueshmërisë së $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, dhe për $x \in (a, b)$ dendësia e $\mathbb{Q}$ jep $p, q \in \mathbb{Q}$ me $a < p < x < q < b$ (Figura 2.1). Kjo do të thotë se $(\mathbb{R}, \tau_{\text{zak}})$ ka *bazë të numërueshme.*

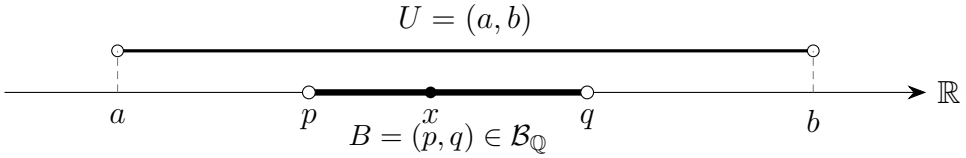


Figura 2.1. Kriteri lokal për bazën $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}$: për çdo $x \in U = (a, b)$ ekziston një interval $B = (p, q)$ me skaje racionale të tillë që $x \in B \subseteq U$.

2.6. Nënbazat dhe fqinjësitë

Përkufizimi 2.26. Një familje $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ quhet *nënbazë* nëse $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$.

Pohimi 2.27. *Nëse $\mathcal{S}$ është nënbazë, atëherë familja $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ e të gjitha prerjeve të fundme $S_1 \cap \cdots \cap S_m$, me $m \geq 1$ dhe $S_1, \ldots, S_m \in \mathcal{S}$, është bazë. Topologjia $\tau_{\mathcal{S}} = \tau_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}$ quhet* topologjia e gjeneruar nga nënbaza $\mathcal{S}$.

Vërtetim. (B1) Për $x \in X$, meqë $\bigcup \mathcal{S} = X$, ekziston $S \in \mathcal{S}$ me $x \in S$, dhe $S \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ (prerje me $m = 1$). (B2) Nëse $B_1 = S_1 \cap \cdots \cap S_m$ dhe $B_2 = S'_1 \cap \cdots \cap S'_k$, atëherë $B_1 \cap B_2 = S_1 \cap \cdots \cap S_m \cap S'_1 \cap \cdots \cap S'_k \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$; mjafton $B_3 = B_1 \cap B_2$. ■

Shembulli 2.28. Në $\mathbb{R}$, familja $\mathcal{S} = \{(-\infty, a) : \ a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, \infty) : \ b \in \mathbb{R}\}$ është nënbazë dhe gjeneron topologjinë e zakonshme. Vërtet, $\bigcup \mathcal{S} = \mathbb{R}$. Çdo interval (b, a) me $b < a$ është prerja $(b, \infty) \cap (-\infty, a) \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$; prandaj $\tau_{\mathcal{S}}$ përmban bazën e intervaleve të hapura dhe, sipas Shembullit 2.24, $\tau_{\text{zak}} \subseteq \tau_{\mathcal{S}}$. Anasjelltas, çdo element i $\mathcal{S}$ është i hapur në τ_{zak}, pra edhe çdo prerje e fundme dhe çdo bashkim i tyre: $\tau_{\mathcal{S}} \subseteq \tau_{\text{zak}}$.

Përkufizimi 2.29. Në (X, τ), bashkësia $N \subseteq X$ quhet *fqinjësi* e pikës $x \in X$ nëse ekziston $U \in \tau$ me $x \in U \subseteq N$.

Një fqinjësi nuk është domosdoshmërisht e hapur: në $(\mathbb{R}, \tau_{\text{zak}})$, bashkësia $[-1, 1]$ është fqinjësi e 0, sepse $0 \in (-1, 1) \subseteq [-1, 1]$, por nuk është e hapur.

Teorema 2.30. *Bashkësia $U \subseteq X$ është e hapur atëherë dhe vetëm atëherë kur është fqinjësi e secilës prej pikave të saj.*

Vërtetim. ($\Rightarrow$) Nëse U është e hapur dhe $x \in U$, atëherë $x \in U \subseteq U$, pra U është fqinjësi e x.

($\Leftarrow$) Për çdo $x \in U$ ekziston $V_x \in \tau$ me $x \in V_x \subseteq U$. Atëherë $U = \bigcup_{x \in U} V_x$, sepse çdo $V_x \subseteq U$ dhe çdo $x \in U$ i përket V_x; sipas (T2), $U \in \tau$. Për $U = \varnothing$, bashkimi është i familjes boshe dhe $\varnothing \in \tau$. ■

Drejt topologjisë. *Në Kapitullin 3, një metrikë d në X do të japë një topologji τ_d me bazë topat e hapur (Leksioni 3.2). Topologjia e zakonshme e Përkufizimit 2.7 është rasti $d(x, y) = |x - y|$, ndërsa topologjia diskrete merret nga metrika diskrete.*

2.7. Përmbledhje dhe gabime të zakonshme

Nocioni	**Rezultati kryesor**	**Ku përdoret më vonë**
Topologjia	Aksiomat (T1)–(T3); diskrete, antidiskrete, e zakonshme, kofinite (P. 2.1, T. 2.10)	Gjithë lënda
Bashkësitë e mbyllura	Aksiomat duale (T. 2.14)	Mbyllja, kufiri, kompaktësia
Krahasimi	Prerja e topologjive; topologjia e gjeneruar (T. 2.18, Rr. 2.19)	Topologjitë e induktuara
Baza, nënbaza	Topologjia e gjeneruar; kriteri lokal (T. 2.22, T. 2.23)	Topologjia metrike, prodhimi
Fqinjësitë	Karakterizimi i të hapurave (T. 2.30)	Vazhdueshmëria në pikë

Gabime të zakonshme.

1. *"E mbyllur" si e kundërt e "e hapur".* Një bashkësi mund të jetë të dyja ose asnjëra (Vërejtja 2.13).
2. *Mbyllja ndaj prerjeve të pafundme.* Aksioma (T3) kërkon vetëm prerje të fundme (Vërejtja 2.2).

3. *Bashkimi i dy topologjive.* Ai mund të mos jetë topologji (Vërejtja 2.20); prerja po (Teorema 2.18).

4. *Kontrolli i (B2) vetëm për bashkësi të barabarta ose të përfshira.* Kushti duhet kontrolluar për çdo dy elemente të bazës dhe çdo pikë të prerjes së tyre (Ushtrimi 2.5).

5. *Fqinjësia si bashkësi e hapur.* Fqinjësia vetëm *përmban* një bashkësi të hapur rreth pikës.

2.8. Ushtrime të zgjidhura për seminar

Çdo ushtrim (në kornizë) pasohet menjëherë nga zgjidhja e plotë. Zgjidhja fillon me *metodën* dhe vazhdon hap pas hapi; fundi i saj shënohet me □. Ushtrimet janë ndarë në tre nivele: *bazë*, *mesatar* dhe *i avancuar*.

Niveli bazë

Ushtrimi 2.1. Për $X = \{1, 2, 3\}$, vërtetoni nëse $\tau = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, X\}$ është topologji.

***Zgjidhje**. Metoda.* Kontrollojmë (T1), pastaj bashkimet dhe prerjet e çifteve (Vërejtja 2.2(c)); çiftet që përmbajnë $\varnothing$ ose X japin përsëri elemente të τ.

(T1) $\varnothing, X \in \tau$. Çiftet e tjera: $\{1\}\cup\{2\} = \{1, 2\}$, $\{1\}\cup\{1, 2\} = \{1, 2\}$, $\{2\}\cup\{1, 2\} = \{1, 2\}$; $\{1\} \cap \{2\} = \varnothing$, $\{1\} \cap \{1, 2\} = \{1\}$, $\{2\} \cap \{1, 2\} = \{2\}$. Të gjitha janë në τ. Meqë τ është e fundme, bashkimi i çdo nënfamiljeje përftohet duke bashkuar elementet dy nga dy. Pra τ është topologji. □

Ushtrimi 2.2. Gjeni bashkësitë e mbyllura të topologjisë $\tau = \{\varnothing, \{a\}, X\}$ në $X = \{a, b\}$.

***Zgjidhje**. Metoda.* Bashkësitë e mbyllura janë pikërisht komplementet e të hapurave.

Komplementet e $\varnothing$, $\{a\}$ dhe X janë përkatësisht X, $\{b\}$ dhe $\varnothing$. Pra bashkësitë e mbyllura janë $\varnothing$, $\{b\}$ dhe X. Bashkësia $\{a\}$ është e hapur, por jo e mbyllur; $\{b\}$ është e mbyllur, por jo e hapur. □

Ushtrimi 2.3. Tregoni se $[0,1)$ nuk është as e hapur as e mbyllur në $(\mathbb{R}, \tau_{\text{zak}})$.

***Zgjidhje**. Metoda.* Gjejmë një pikë ku kushti i Përkufizimit 2.7 dështon, një herë për bashkësinë dhe një herë për komplementin.

Jo e hapur. Për $x = 0 \in [0,1)$ dhe çdo $\varepsilon > 0$, pika $-\frac{\varepsilon}{2}$ i përket $(-\varepsilon, \varepsilon)$, por jo $[0,1)$.

Jo e mbyllur. Komplementi është $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$. Për $x = 1$ dhe çdo $\varepsilon > 0$, pika $1 - \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\right\} \in [0,1)$ i përket $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, por jo komplementit. Pra komplementi nuk është i hapur. □

Niveli mesatar

Ushtrimi 2.4. Le të jetë X një bashkësi e pafundme. (a) Vërtetoni se $\tau_{\text{kof}} \neq \tau_{\text{dis}}$. (b) Për $X = \mathbb{R}$, vërtetoni se çdo bashkësi e fundme është e mbyllur në τ_{zak} dhe se $\tau_{\text{kof}} \subsetneq \tau_{\text{zak}}$.

***Zgjidhje**. Metoda.* Për (a) gjejmë një bashkësi të hapur në τ_{dis} që nuk është në τ_{kof}; për (b) shqyrtojmë së pari një pikë dhe pastaj përdorim Teoremën 2.14.

(a) Për $x \in X$, bashkësia $\{x\}$ është e hapur në τ_{dis}, por $X \setminus \{x\}$ është e pafundme dhe $\{x\} \neq \varnothing$; pra $\{x\} \notin \tau_{\text{kof}}$.

(b) Për $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, \infty)$ është e hapur: për $x \neq a$ mjafton $\varepsilon = |x - a|$. Pra $\{a\}$ është e mbyllur, dhe një bashkësi e fundme, si bashkim i fundëm pikash, është e mbyllur sipas Teoremës 2.14(iii). Prandaj $\tau_{\text{kof}} \subseteq \tau_{\text{zak}}$ (Shembulli 2.17). Përfshirja është strikte: $(0,1) \in \tau_{\text{zak}}$, por $\mathbb{R} \setminus (0,1)$ është e pafundme, pra $(0,1) \notin \tau_{\text{kof}}$. □

Ushtrimi 2.5. Për $X = \{a, b, c\}$, vendosni nëse $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ është bazë.

***Zgjidhje**. Metoda.* Kontrollojmë (B1) dhe pastaj (B2) për çdo çift elementesh me prerje jo boshe.

(B1) plotësohet, sepse $\{a\} \cup \{a, b\} \cup \{b, c\} = X$. Për (B2), $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$ dhe b i përket kësaj prerjeje. Elementet e $\mathcal{B}$ që përmbajnë b janë $\{a, b\}$ dhe $\{b, c\}$, asnjëri prej të cilëve nuk përmbahet në $\{b\}$. Kushti (B2) nuk plotësohet, pra $\mathcal{B}$ nuk është bazë. □

Ushtrimi 2.6. Vërtetoni se çdo topologji në një bashkësi të fundme ka një bazë të fundme.

***Zgjidhje**. Metoda.* Tregojmë se vetë topologjia është bazë e saj.

Nëse X është e fundme, atëherë $\mathcal{P}(X)$ është e fundme, prandaj edhe $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ është e fundme. Familja τ plotëson (B1), sepse $X \in \tau$, dhe (B2), sepse $B_1 \cap B_2 \in \tau$ sipas (T3). Për më tepër, çdo element i τ_τ është bashkim elementesh të τ, pra element i τ sipas (T2), ndërsa $\tau \subseteq \tau_\tau$ sipas Teoremës 2.22. Pra $\tau_\tau = \tau$, dhe τ është bazë e fundme e vetvetes. □

Niveli i avancuar

Ushtrimi 2.7. Gjeni bashkësitë e mbyllura të topologjisë së gjysmëdrejtëzave τ_+ (Shembulli 2.11) dhe vërtetoni se $\tau_+ \subsetneq \tau_{\text{zak}}$.

***Zgjidhje**. Metoda.* Marrim komplementet e elementeve të τ_+; për përfshirjen përdorim Përkufizimin 2.7.

Komplementet e $\varnothing$, $\mathbb{R}$ dhe (a, ∞) janë $\mathbb{R}$, $\varnothing$ dhe $(-\infty, a]$. Pra bashkësitë e mbyllura janë $\varnothing$, $\mathbb{R}$ dhe gjysmëdrejtëzat $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$.

Çdo (a, ∞) është e hapur në τ_{zak}: për $x > a$ mjafton $\varepsilon = x - a$. Pra $\tau_+ \subseteq \tau_{\text{zak}}$. Përfshirja është strikte: $(0, 1) \in \tau_{\text{zak}}$, por $(0, 1)$ nuk është as $\varnothing$, as $\mathbb{R}$, as e trajtës (a, ∞). □

Ushtrimi 2.8. Vërtetoni se topologjia $\tau_{\mathcal{S}}$ e gjeneruar nga nënbaza $\mathcal{S}$ është topologjia më e trashë që përmban $\mathcal{S}$, pra përputhet me topologjinë e gjeneruar nga $\mathcal{S}$ në kuptimin e Rrjedhimit 2.19.

***Zgjidhje**. Metoda.* Tregojmë dy gjëra: $\mathcal{S} \subseteq \tau_{\mathcal{S}}$, dhe çdo topologji që përmban $\mathcal{S}$ përmban $\tau_{\mathcal{S}}$.

Çdo $S \in \mathcal{S}$ është prerje me një element, pra $S \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}} \subseteq \tau_{\mathcal{S}}$. Le të jetë τ' një topologji me $\mathcal{S} \subseteq \tau'$. Sipas (T3), çdo prerje e fundme elementesh të $\mathcal{S}$ është në τ', pra $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} \subseteq \tau'$; sipas (T2), çdo bashkim elementesh të $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ është në τ', pra $\tau_{\mathcal{S}} \subseteq \tau'$. Kështu $\tau_{\mathcal{S}}$ përmbahet në çdo topologji që përmban $\mathcal{S}$ dhe është vetë e tillë; ajo përputhet me prerjen e Rrjedhimit 2.19. □

Ushtrimi 2.9. Sa topologji ka në bashkësinë $X = \{a, b\}$? Cilat janë të krahasueshme?

***Zgjidhje**. Metoda.* Çdo topologji përmban $\varnothing$ dhe X (T1); mbetet të zgjidhet cilat nga $\{a\}$ dhe $\{b\}$ përfshihen, dhe të kontrollohen aksiomat.

Nënbashkësitë e mundshme shtesë janë $\{a\}$ dhe $\{b\}$, prandaj kandidatët janë katër:

$$\{\varnothing, X\}, \qquad \{\varnothing, \{a\}, X\}, \qquad \{\varnothing, \{b\}, X\}, \qquad \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, X\}.$$

Secili është topologji: bashkimet dhe prerjet e elementeve janë përsëri në familje (për të fundit, $\{a\} \cup \{b\} = X$ dhe $\{a\} \cap \{b\} = \varnothing$). Pra ka katër topologji. E para është më e trasha dhe e katërta (diskrete) më e imta; ato janë të krahasueshme me të gjitha. E dyta dhe e treta janë të pakrahasueshme (Shembulli 2.17(c)). □

2.9. Pyetje për vetëkontroll

1. Pse aksioma (T3) kërkohet vetëm për familje të fundme?
2. A mund të jetë një bashkësi njëkohësisht e hapur dhe e mbyllur? Jepni shembuj në dy topologji të ndryshme.
3. Cili është dallimi ndërmjet një baze dhe një nënbaze?
4. Si verifikohet nëse një familje e dhënë është bazë?
5. A është çdo fqinjësi domosdoshmërisht e hapur?
6. Pse bashkimi i dy topologjive mund të mos jetë topologji, ndërsa prerja e tyre është gjithmonë topologji?

Lidhja me kapitullin pasues. Kapitulli 3 trajton hapësirat metrike. Leksioni 3.1 përkufizon metrikën; Leksioni 3.2 tregon se topat e hapur janë bazë e një topologjie τ_d, duke përdorur Përkufizimin 2.1 dhe Teoremën 2.30 të këtij kapitulli.

Lidhja me Kapitullin 3. Në Kapitullin 3 topologjia nuk jepet drejtpërdrejt, por ndërtohet nga një funksion distance. Topat metrikë formojnë një bazë në kuptimin e Përkufizimit 2.21, dhe topologjia e zakonshme τ_{zak} e këtij kapitulli del si topologjia e induktuar nga metrika $d(x, y) = |x - y|$ (Leksioni 3.2).

Literatura

[1] J. R. Munkres, *Topology*, botimi i 2-të, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.

[2] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading, 1970.

© 2026 Prof. As. Dr. Siditë Duraj · Material mësimor universitar · Universiteti i Shkodrës "Luigj Gurakuqi"