UNIVERSITETI I SHKODRËS “LUIGJ GURAKUQI”

Fakulteti i Shkencave të Natyrës

Programi: Bachelor në Matematikë · Viti III

TOPOLOGJI

Kapitulli 1

Njohuri paraprake

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Material mësimor universitar

Viti akademik 2026–2027

KAPITULLI 1

Njohuri paraprake

Qëllimi. Topologjia ndërtohet mbi një numër të vogël nocionesh: bashkësitë dhe veprimet me to, funksionet dhe sjellja e tyre ndaj veprimeve me bashkësi, dhe kardinaliteti i bashkësive. Ky kapitull i sistematizon këto nocione në formën në të cilën ato do të përdoren për përkufizimin e hapësirave topologjike, për studimin e vazhdueshmërisë dhe për bazat e numërueshme. Çdo seksion mbyllet me një paragraf *Drejt topologjisë*, që tregon ku do të përdoret materiali.

Rezultatet e të nxënit. Në përfundim të kapitullit, studenti është në gjendje:

(1) të llogarisë bashkimin, prerjen, diferencën dhe komplementin e bashkësive, përfshirë bashkimin dhe prerjen e familjeve të pafundme intervalesh;

(2) të vërtetojë me metodën e elementit barazime ndërmjet bashkësive, ndër to ligjet e De Morganit për familje të çfarëdoshme;

(3) të përcaktojë, me argumentim, nëse një funksion është injektiv, syrjektiv ose bijektiv dhe të ndërtojë funksionin e anasjelltë kur ai ekziston;

(4) të llogarisë shëmbëllime dhe parabashkësi dhe të dallojë cilat veprime ruhen prej tyre, me kundërshembuj kur një barazim nuk vlen;

(5) të vërtetojë numërueshmërinë e një bashkësie duke ndërtuar një injeksion, një syrjeksion ose një bijeksion të qartë;

(6) të riprodhojë argumentin diagonal të Cantor-it dhe të shpjegojë rolin e paraqitjes dhjetore kanonike në të.

Njohuritë paraprake. Bashkësitë numerike $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, intervalet dhe vlera absolute, vetia e Arkimedit dhe paraqitja dhjetore e numrave realë (Analiza Matematike I); induksioni matematik.

Konventat e kapitullit. Në këtë libër $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Kur shqyrtohen nënbashkësi të një bashkësie X, kjo e fundit quhet *bashkësi universale* dhe komplementi merret gjithmonë ndaj saj. Deri në përkufizimin e hapësirës topologjike (Kapitulli 2), shprehjet "e hapur në $\mathbb{R}$" dhe "e mbyllur në $\mathbb{R}$" merren në kuptimin e Analizës Matematike: $U \subseteq \mathbb{R}$ është e hapur nëse për çdo $x \in U$ ekziston $\varepsilon > 0$ e tillë që $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U$, dhe $F \subseteq \mathbb{R}$ është e mbyllur nëse $\mathbb{R} \setminus F$ është e hapur.

1.1. Bashkësitë dhe veprimet me bashkësi

Përkufizimi 1.1. Le të jenë $A, B \subseteq X$. Përkufizojmë

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in X : \ x \in A \text{ ose } x \in B\} && \text{(bashkimi)}, \\ A \cap B &= \{x \in X : \ x \in A \text{ dhe } x \in B\} && \text{(prerja)}, \\ A \setminus B &= \{x \in A : \ x \notin B\} && \text{(diferenca)}, \\ A^c &= X \setminus A && \text{(komplementi)}. \end{aligned}$$

Bashkësitë A dhe B quhen *të pandërprera* (ose pa pika të përbashkëta) nëse $A \cap B = \varnothing$.

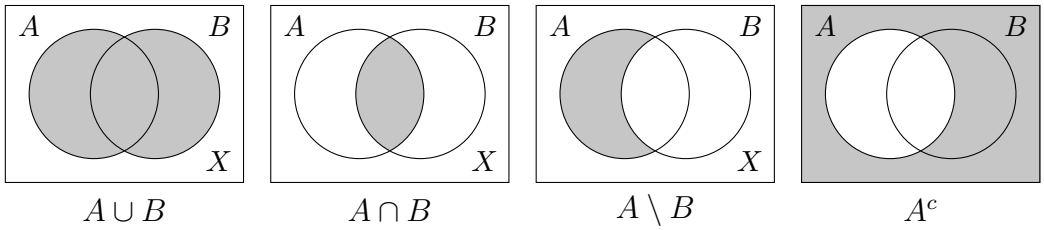


Figura 1.1. Veprimet me bashkësi në një bashkësi universale X. Pjesa e hijezuar paraqet, nga e majta në të djathtë, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ dhe A^c.

Shembulli 1.2. Le të jenë $A = (-2, 3]$ dhe $B = [1, 5)$ në $X = \mathbb{R}$. Për të gjetur veprimet, shqyrtojmë së pari pjesët e brendshme të intervaleve dhe më pas pikat skajore $-2, 1, 3, 5$ veçmas:

- $1 \in A$ dhe $1 \in B$; $\quad 3 \in A$ dhe $3 \in B$; $\quad -2 \notin A$; $\quad 5 \notin B$.

Prandaj

$$A \cap B = [1, 3], \qquad A \cup B = (-2, 5), \qquad A \setminus B = (-2, 1), \qquad B \setminus A = (3, 5).$$

Vini re se $1 \notin A \setminus B$, sepse $1 \in B$, dhe $3 \notin B \setminus A$, sepse $3 \in A$.

Në topologji nuk mjafton të punojmë me dy ose me një numër të fundëm bashkësish; na nevojiten bashkime dhe prerje të familjeve të çfarëdoshme.

Përkufizimi 1.3. Le të jetë I një bashkësi (*bashkësia e indekseve*) dhe, për çdo $i \in I$, le të jetë $A_i \subseteq X$. Bashkimi dhe prerja e *familjes së indeksuar* $(A_i)_{i \in I}$ përkufizohen me

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X : \ \exists\, i \in I, \ x \in A_i\}, \qquad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X : \ \forall\, i \in I, \ x \in A_i\}. \tag{1.1}$$

Bashkësia I mund të jetë e fundme, e numërueshme ose e panumërueshme.

Vërejtje 1.4 (Familja boshe)**.** Për $I = \varnothing$ përkufizimi (1.1) jep

$$\bigcup_{i\in\varnothing} A_i = \varnothing, \qquad \bigcap_{i\in\varnothing} A_i = X.$$

Arsyeja: nuk ekziston asnjë $i \in \varnothing$, prandaj kushti "$\exists\, i \in I,\ x \in A_i$" nuk plotësohet nga asnjë x, ndërsa kushti "$\forall\, i \in I,\ x \in A_i$" plotësohet nga çdo $x \in X$, sepse nuk ka asnjë indeks për të kontrolluar. Prerja e familjes boshe varet nga bashkësia universale X; prandaj ajo ka kuptim vetëm kur X është fiksuar.

Shembulli 1.5 (Bashkim dhe prerje e një familjeje rritëse)**.** Për $n \in \mathbb{N}$, le të jetë

$$A_n = \left[\frac{1}{n},\, 2 - \frac{1}{n}\right].$$

Atëherë $A_1 = [1,1] = \{1\}$, $A_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, dhe $A_n \subseteq A_{n+1}$ për çdo n, sepse $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ dhe $2 - \frac{1}{n} < 2 - \frac{1}{n+1}$. Pohojmë se

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,2), \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{1\}.$$

Bashkimi. Çdo $A_n \subseteq (0,2)$, sepse $\frac{1}{n} > 0$ dhe $2 - \frac{1}{n} < 2$. Anasjelltas, le të jetë $0 < x < 2$. Atëherë $\min\{x, 2-x\} > 0$ dhe, sipas vetisë së Arkimedit, ekziston $n \in \mathbb{N}$ me $\frac{1}{n} \le \min\{x, 2-x\}$. Për këtë n kemi $\frac{1}{n} \le x$ dhe $x \le 2 - \frac{1}{n}$, pra $x \in A_n$. Pikat 0 dhe 2 nuk i përkasin asnjë A_n.

Prerja. Meqë $A_1 \subseteq A_n$ për çdo n, kemi $\bigcap_n A_n = A_1 = \{1\}$.

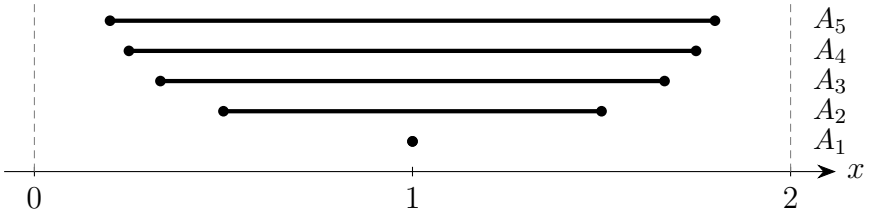


Figura 1.2. Familja rritëse $A_n = \left[\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right]$, $n = 1, \ldots, 5$. Intervalet e mbyllura zgjerohen drejt $(0,2)$; pikat 0 dhe 2 nuk arrihen kurrë.

Shembulli 1.6 (Prerje e pafundme intervalesh të hapura)**.** Për $n \in \mathbb{N}$, le të jetë

$$U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

Atëherë $U_{n+1} \subseteq U_n$ për çdo n, dhe

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 = (-1,1), \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}.$$

Për prerjen: $0 \in U_n$ për çdo n. Nëse $x \neq 0$, sipas vetisë së Arkimedit ekziston n me $\frac{1}{n} \leq |x|$, prandaj $x \notin U_n$. Çdo U_n është e hapur në $\mathbb{R}$, por $\{0\}$ nuk është e hapur, sepse asnjë interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$ me $\varepsilon > 0$ nuk përmbahet në $\{0\}$.

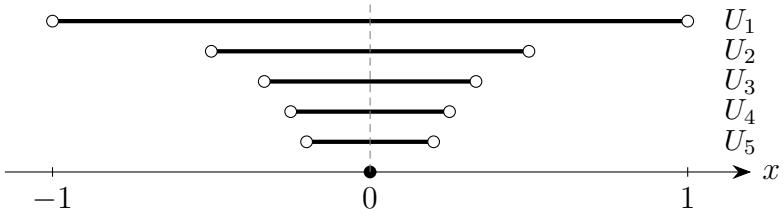


Figura 1.3. Familja zbritëse $U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, \ldots, 5$. Çdo interval është i hapur; e vetmja pikë e përbashkët e të gjitha intervaleve është 0.

Teorema 1.7 (Ligjet e De Morganit)**.** *Për çdo familje $(A_i)_{i\in I}$ nënbashkësish të X vlejnë*

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c, \qquad \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c. \tag{1.2}$$

Në veçanti, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ dhe $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Vërtetim. Dy bashkësi janë të barabarta kur kanë të njëjtët elemente; prandaj mjafton të tregojmë se, për çdo $x \in X$, përkatësia në anën e majtë është e barasvlershme me përkatësinë në anën e djathtë. Për barazimin e parë:

$$\begin{aligned}
x \in \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^c &\iff \neg\big(\exists\, i \in I :\ x \in A_i\big) && \text{(përkufizimi i komplementit dhe i bashkimit)}\\
&\iff \forall\, i \in I :\ x \notin A_i && \text{(mohimi i kuantorit ekzistencial)}\\
&\iff \forall\, i \in I :\ x \in A_i^c && \text{(përkufizimi i komplementit)}\\
&\iff x \in \bigcap_{i\in I} A_i^c.
\end{aligned}$$

Për barazimin e dytë:

$$\begin{aligned}
x \in \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)^c &\iff \neg\big(\forall\, i \in I :\ x \in A_i\big) \iff \exists\, i \in I :\ x \notin A_i\\
&\iff \exists\, i \in I :\ x \in A_i^c \iff x \in \bigcup_{i\in I} A_i^c.
\end{aligned}$$

Rastet e veçanta përftohen për $I = \{1, 2\}$, $A_1 = A$, $A_2 = B$. ■

Pohimi 1.8 (Distributiviteti)**.** *Për çdo $A \subseteq X$ dhe çdo familje $(B_i)_{i\in I}$ nënbashkësish të X:*

$$A \cap \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I} (A \cap B_i), \qquad A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I} (A \cup B_i).$$

Vërtetim. Për barazimin e parë: $x \in A \cap \bigcup_i B_i$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $x \in A$ dhe ekziston i me $x \in B_i$; kjo është e barasvlershme me ekzistencën e një i të tillë që $x \in A$ dhe $x \in B_i$, pra me $x \in \bigcup_i (A \cap B_i)$. Për barazimin e dytë: $x \in A \cup \bigcap_i B_i$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $x \in A$ ose $x \in B_i$ për çdo i. Nëse $x \in A$, atëherë $x \in A \cup B_i$ për çdo i; nëse $x \notin A$, kushti bëhet $x \in B_i$ për çdo i, që është i barasvlershëm me $x \in A \cup B_i$ për çdo i. Në të dyja rastet përftojmë $x \in \bigcap_i (A \cup B_i)$, dhe arsyetimi është i kthyeshëm. ■

Drejt topologjisë. *Në Kapitullin 2, një* topologji *në X do të përkufizohet si një familje τ nënbashkësish të X (bashkësitë e hapura) që përmban $\varnothing$ dhe X, është e mbyllur ndaj bashkimit të çdo nënfamiljeje dhe ndaj prerjes së çdo nënfamiljeje të fundme. Shembulli 1.6 tregon pse nuk kërkohet mbyllja ndaj prerjeve të pafundme: ajo nuk vlen as për bashkësitë e hapura të $\mathbb{R}$. Nga Teorema 1.7 do të rrjedhë se bashkësitë e mbyllura (komplementet e të hapurave) janë të mbyllura ndaj prerjeve të çfarëdoshme dhe ndaj bashkimeve të fundme. Pohimi 1.8 do të përdoret më vonë për topologjinë e nënhapësirës.*

1.2. Funksionet, shëmbëllimet dhe parabashkësitë

Përkufizimi 1.9. Një *funksion* $f\colon X \to Y$ i shoqëron çdo elementi $x \in X$ një element të vetëm $f(x) \in Y$. Funksioni f quhet

- *injektiv*, nëse për çdo $x_1, x_2 \in X$ nga $f(x_1) = f(x_2)$ rrjedh $x_1 = x_2$;
- *syrjektiv*, nëse për çdo $y \in Y$ ekziston $x \in X$ i tillë që $f(x) = y$;
- *bijektiv* (ose *bijeksion*), nëse është njëkohësisht injektiv dhe syrjektiv.

Për $f\colon X \to Y$ dhe $g\colon Y \to Z$, *përbërja* $g \circ f\colon X \to Z$ përkufizohet me $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Funksioni $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$, quhet *funksioni identik* i X.

Shembulli 1.10. (a) Funksioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, është bijektiv. *Injektiviteti:* nga $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$ rrjedh $2x_1 = 2x_2$, pra $x_1 = x_2$. *Syrjektiviteti:* për $y \in \mathbb{R}$ çfarëdo, numri $x = \frac{y-1}{2}$ plotëson $f(x) = 2 \cdot \frac{y-1}{2} + 1 = y$.

(b) Funksioni $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, nuk është injektiv, sepse $g(-1) = g(1) = 1$ ndërsa $-1 \neq 1$, dhe nuk është syrjektiv, sepse -1 nuk merret si vlerë: $x^2 \geq 0$ për çdo x.

(c) Funksioni $h\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $h(x) = x^2$, është bijektiv: nëse $x_1^2 = x_2^2$ me $x_1, x_2 \geq 0$, atëherë $x_1 = |x_1| = |x_2| = x_2$; për $y \geq 0$, numri $x = \sqrt{y}$ plotëson $h(x) = y$. Shembujt (b) dhe (c) tregojnë se vetitë e një funksioni varen nga bashkësia e përkufizimit dhe nga bashkësia ku merr vlera.

Përkufizimi 1.11. Funksioni $g\colon Y \to X$ quhet *funksion i anasjelltë* i $f\colon X \to Y$ nëse

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \qquad \text{dhe} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

Teorema 1.12. *Funksioni $f\colon X \to Y$ ka funksion të anasjelltë atëherë dhe vetëm atëherë kur f është bijektiv. Në këtë rast funksioni i anasjelltë është i vetëm; ai shënohet me f^{-1} dhe është gjithashtu bijektiv.*

Vërtetim. ($\Rightarrow$) Le të jetë g funksion i anasjelltë i f. Nëse $f(x_1) = f(x_2)$, atëherë $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$; pra f është injektiv. Për $y \in Y$, elementi $x = g(y)$ plotëson $f(x) = f(g(y)) = y$; pra f është syrjektiv.

($\Leftarrow$) Le të jetë f bijektiv. Për çdo $y \in Y$ ekziston, sipas syrjektivitetit, një $x \in X$ me $f(x) = y$, dhe sipas injektivitetit ky x është i vetëm. Përkufizojmë $g(y)$ si këtë element të vetëm. Atëherë $f(g(y)) = y$ për çdo $y \in Y$. Për $x \in X$, elementi $g(f(x))$ është i vetmi element që f e çon në $f(x)$; meqë edhe x ka këtë veti, $g(f(x)) = x$.

Uniciteti. Nëse g dhe h janë të dy funksione të anasjellta të f, atëherë

$$g = g \circ \mathrm{id}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_X \circ h = h.$$

Së fundi, barazimet $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ dhe $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ tregojnë se f është funksion i anasjelltë i f^{-1}; sipas pjesës ($\Rightarrow$), f^{-1} është bijektiv. ■

Për funksionin e Shembullit 1.10(a), funksioni i anasjelltë është $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$.

Përkufizimi 1.13. Le të jetë $f\colon X \to Y$. Për $A \subseteq X$ dhe $B \subseteq Y$ përkufizojmë

$$f(A) = \{f(x) :\ x \in A\} \subseteq Y \qquad (\textit{shëmbëllimi} \text{ i } A),$$
$$f^{-1}(B) = \{x \in X :\ f(x) \in B\} \subseteq X \qquad (\textit{parabashkësia} \text{ e } B).$$

Bashkësia $f(X)$ quhet *bashkësia e vlerave* të f.

Vërejtje 1.14 (Për shënimin f^{-1})**.** Parabashkësia $f^{-1}(B)$ është e përkufizuar për *çdo* funksion f dhe për çdo $B \subseteq Y$; ajo nuk kërkon ekzistencën e funksionit të anasjelltë. Kur f është bijektiv, të dy leximet e shënimit $f^{-1}(B)$ përputhen: parabashkësia e B nën f është e barabartë me shëmbëllimin e B nën funksionin e anasjelltë. Vërtet, për $x \in X$ kemi $f(x) \in B$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $x = f^{-1}(y)$ për ndonjë $y \in B$ (përkatësisht $y = f(x)$).

Shembulli 1.15 (Parabashkësi dhe shëmbëllime, hap pas hapi)**.** Le të jetë $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

(a) $f^{-1}([1,4])$. Kushti $x \in f^{-1}([1,4])$ është $1 \le x^2 \le 4$. Meqë $x^2 = |x|^2$ dhe funksioni $t \mapsto t^2$ është rritës në $[0,\infty)$, ky kusht është i barasvlershëm me $1 \le |x| \le 2$, pra me $-2 \le x \le -1$ ose $1 \le x \le 2$. Prandaj

$$f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2].$$

(b) $f^{-1}\big((-\infty,0)\big) = \varnothing$, sepse $x^2 \ge 0$ për çdo x. Parabashkësia është boshe pikërisht kur $B \cap f(X) = \varnothing$.

(c) $f([-1,2])$. Në $[-1,0]$ vlerat e x^2 mbushin $[0,1]$, ndërsa në $[0,2]$ mbushin $[0,4]$ (funksioni është i vazhdueshëm dhe monoton në secilin nga këto intervale). Prandaj $f([-1,2]) = [0,1] \cup [0,4] = [0,4]$. Vini re se $f([-1,2]) \neq \big[f(-1), f(2)\big] = [1,4]$: vlera më e vogël 0 merret në pikën e brendshme $x = 0$.

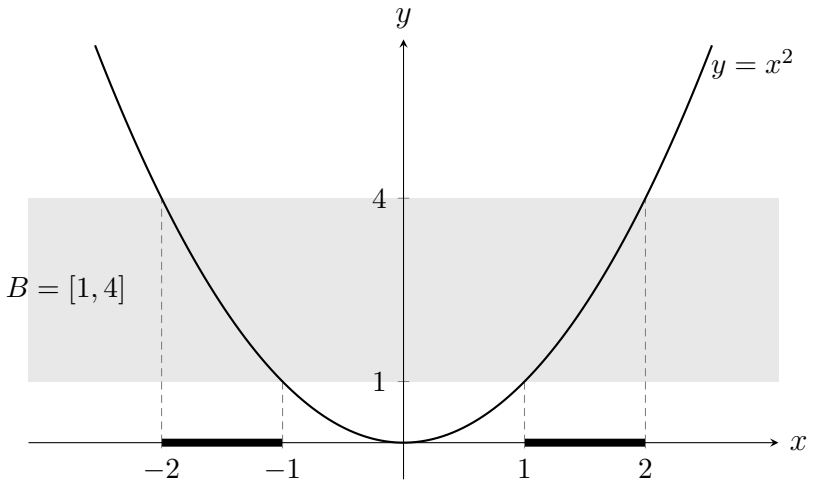


Figura 1.4. Parabashkësia $f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2]$ për $f(x) = x^2$: pikat e boshtit Ox (segmentet e trasha) shëmbëllimet e të cilave bien në brezin e hijezuar $1 \le y \le 4$. Figura është vizatuar në shkallë të saktë.

Teorema 1.16 (Parabashkësitë ruajnë veprimet)**.** *Le të jetë $f\colon X \to Y$, $B, C \subseteq Y$ dhe $(B_i)_{i\in I}$ një familje nënbashkësish të Y. Atëherë*

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \tag{1.3}$$

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i), \tag{1.4}$$

$$f^{-1}(B \setminus C) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(C), \qquad \text{në veçanti} \quad f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B). \tag{1.5}$$

Për më tepër, nëse $g\colon Y \to Z$ dhe $D \subseteq Z$, atëherë $(g \circ f)^{-1}(D) = f^{-1}\big(g^{-1}(D)\big)$.

Vërtetim. Le të jetë $x \in X$. Për (1.3):

$$x \in f^{-1}\Big(\bigcup_i B_i\Big) \iff f(x) \in \bigcup_i B_i \iff \exists\, i:\ f(x) \in B_i$$
$$\iff \exists\, i:\ x \in f^{-1}(B_i) \iff x \in \bigcup_i f^{-1}(B_i).$$

Barazimi (1.4) vërtetohet me të njëjtin varg ekuivalencash, duke zëvendësuar kuantorin $\exists$ me $\forall$ (për $I = \varnothing$ të dyja anët janë X, sipas Vërejtjes 1.4 të zbatuar në Y dhe në X). Për (1.5):

$$x \in f^{-1}(B \setminus C) \iff f(x) \in B \text{ dhe } f(x) \notin C$$
$$\iff x \in f^{-1}(B) \text{ dhe } x \notin f^{-1}(C) \iff x \in f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(C).$$

Rasti i veçantë përftohet për $B = Y$, sepse $f^{-1}(Y) = X$. Së fundi,

$$x \in (g \circ f)^{-1}(D) \iff g(f(x)) \in D \iff f(x) \in g^{-1}(D) \iff x \in f^{-1}\big(g^{-1}(D)\big).$$

■

Për shëmbëllimet situata është ndryshe: ato ruajnë bashkimet, por jo prerjet.

Teorema 1.17 (Shëmbëllimet)**.** *Le të jetë $f\colon X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ dhe $(A_i)_{i\in I}$ një familje nënbashkësish të X. Atëherë:*

(a) $f\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$;

(b) $f\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$; *nëse f është injektiv dhe $I \neq \varnothing$, vlen barazimi;*

(c) $f\big(f^{-1}(B)\big) = B \cap f(X) \subseteq B$, *me barazim $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$ për çdo B kur f është syrjektiv;*

(d) $A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$, *me barazim kur f është injektiv.*

Vërtetim. (a) $y \in f\big(\bigcup_i A_i\big)$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $y = f(x)$ për ndonjë x që i përket ndonjë A_i; kjo është e barasvlershme me ekzistencën e një i të tillë që $y \in f(A_i)$, pra me $y \in \bigcup_i f(A_i)$.

(b) Nëse $y \in f\big(\bigcap_i A_i\big)$, atëherë $y = f(x)$ me $x \in A_i$ për çdo i; pra $y \in f(A_i)$ për çdo i. Le të jetë tani f injektiv, $I \neq \varnothing$ dhe $y \in \bigcap_i f(A_i)$. Për çdo i ekziston $x_i \in A_i$ me $f(x_i) = y$. Nga injektiviteti, $x_i = x_j$ për çdo $i, j \in I$; meqë $I \neq \varnothing$, ky element i përbashkët x ekziston, i përket çdo A_i dhe plotëson $f(x) = y$. Pra $y \in f\big(\bigcap_i A_i\big)$.

(c) Nëse $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$, atëherë $y = f(x)$ me $f(x) \in B$, pra $y \in B \cap f(X)$. Anasjelltas,

nëse $y \in B \cap f(X)$, atëherë $y = f(x)$ për ndonjë $x \in X$, dhe $f(x) = y \in B$ jep $x \in f^{-1}(B)$; pra $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$. Kur f është syrjektiv, $f(X) = Y$ dhe $B \cap f(X) = B$.

(d) Nëse $x \in A$, atëherë $f(x) \in f(A)$, pra $x \in f^{-1}(f(A))$. Le të jetë f injektiv dhe $x \in f^{-1}(f(A))$. Atëherë $f(x) = f(a)$ për ndonjë $a \in A$, dhe injektiviteti jep $x = a \in A$. ■

Vërejtje 1.18 (Pse kërkohet $I \neq \varnothing$)**.** Për $I = \varnothing$ kemi $f\big(\bigcap_{i\in\varnothing} A_i\big) = f(X)$, ndërsa $\bigcap_{i\in\varnothing} f(A_i) = Y$ (prerja e familjes boshe merret në bashkësinë universale Y). Këto janë të barabarta vetëm kur f është syrjektiv. Pra pa kushtin $I \neq \varnothing$ pohimi (b) do të ishte i gabuar, p.sh. për përfshirjen injektive $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Shembulli 1.19 (Kundërshembuj)**.** Le të jetë $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

(a) Për $A = [-1, 0]$ dhe $B = [0, 1]$: $f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$, ndërsa $f(A) \cap f(B) = [0, 1] \cap [0, 1] = [0, 1]$. Përfshirja në Teoremën 1.17(b) është strikte.

(b) Për $A = [0, 1]$: $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1] \neq A$.

(c) Për $B = [-1, 1]$: $f(f^{-1}(B)) = f([-1, 1]) = [0, 1] \neq B$.

Vërejtje 1.20 (Vërejtje metodike)**.** Barazimi për shëmbëllimin e bashkimit vlen pa asnjë kusht mbi f. Për shëmbëllimin e prerjes, injektiviteti është kusht *i mjaftueshëm* për barazimin, por jo *i domosdoshëm* për një familje të caktuar: për $f(x) = x^2$, $A = [0, 1]$ dhe $B = [0, 2]$ kemi $f(A \cap B) = [0, 1] = f(A) \cap f(B)$, megjithëse f nuk është injektiv. Barazimi për *të gjitha* çiftet A, B është i barasvlershëm me injektivitetin (Ushtrimi 1.9).

Drejt topologjisë. *Funksioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ është i vazhdueshëm në kuptimin e Analizës atëherë dhe vetëm atëherë kur $f^{-1}(U)$ është e hapur për çdo U të hapur; ky pohim do të vërtetohet në kapitullin për vazhdueshmërinë dhe do të shërbejë si përkufizim i vazhdueshmërisë ndërmjet hapësirave topologjike. Teorema 1.16 siguron që ky përkufizim të jetë i pajtueshëm me aksiomat e topologjisë, sepse parabashkësitë ruajnë bashkimet, prerjet dhe komplementet, ndërsa barazimi për përbërjen jep menjëherë vazhdueshmërinë e përbërjes së dy funksioneve të vazhdueshëm. Shëmbëllimet, që nuk ruajnë prerjet, nuk do të përdoren për këtë qëllim.*

1.3. Kardinaliteti dhe numërueshmëria

Për $n \in \mathbb{N}$ shënojmë $\{1, \ldots, n\} = \{k \in \mathbb{N} :\ k \leq n\}$.

Përkufizimi 1.21. Bashkësitë A dhe B kanë *të njëjtin kardinalitet*, dhe shkruajmë $|A| = |B|$, nëse ekziston një bijeksion $A \to B$. Bashkësia A quhet

- *e fundme*, nëse $A = \varnothing$ ose $|A| = |\{1, \dots, n\}|$ për ndonjë $n \in \mathbb{N}$;
- *e pafundme e numërueshme*, nëse $|A| = |\mathbb{N}|$;
- *e numërueshme*, nëse është e fundme ose e pafundme e numërueshme;
- *e panumërueshme*, nëse nuk është e numërueshme.

Vërejtje 1.22. Disa autorë e përdorin termin "e numërueshme" vetëm për bashkësitë e pafundme të numërueshme; në këtë libër bashkësitë e fundme janë gjithashtu të numërueshme. Relacioni $|A| = |B|$ është refleksiv (id_A është bijeksion), simetrik (funksioni i anasjelltë i një bijeksioni është bijeksion, Teorema 1.12) dhe kalimtar (përbërja e dy bijeksioneve është bijeksion). Prandaj, nëse $|A| = |B|$ dhe B është e numërueshme, edhe A është e numërueshme. Përdorim gjithashtu faktin elementar se çdo nënbashkësi e një bashkësie të fundme është e fundme.

Shembulli 1.23. (a) Funksioni $n \mapsto 2n$ është bijeksion nga $\mathbb{N}$ në bashkësinë e numrave natyrorë çift. Kështu një bashkësi e pafundme mund të ketë të njëjtin kardinalitet me një nënbashkësi të vërtetë të saj.

(b) Bashkësia $\mathbb{Z}$ është e pafundme e numërueshme. Funksioni

$$h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \qquad h(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n \text{ çift}, \\ -\dfrac{n-1}{2}, & n \text{ tek}, \end{cases}$$

i rendit numrat e plotë si $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$ dhe është bijektiv. Vërtet, h i çon numrat çift në numrat e plotë pozitivë dhe numrat tek në numrat e plotë jopozitivë, dhe në secilën nga këto dy klasa është injektiv; për syrjektivitetin, $k > 0$ merret nga $n = 2k$, ndërsa $k \le 0$ merret nga $n = 1 - 2k$.

Lema 1.24. *Çdo nënbashkësi $S \subseteq \mathbb{N}$ është e numërueshme.*

Vërtetim. Nëse S është e fundme, nuk kemi çfarë të vërtetojmë. Le të jetë S e pafundme. Përkufizojmë me induksion

$$s_1 = \min S, \qquad s_{k+1} = \min\bigl(S \setminus \{s_1, \dots, s_k\}\bigr),$$

ku minimumi ekziston sepse çdo nënbashkësi jo boshe e $\mathbb{N}$ ka element më të vogël, dhe $S \setminus \{s_1, \dots, s_k\} \neq \varnothing$ sepse S është e pafundme. Vargu (s_k) është rreptësisht rritës: s_{k+1} është minimumi i një bashkësie që përmbahet në atë, minimumi i së cilës është s_k, dhe $s_{k+1} \neq s_k$. Pra $k \mapsto s_k$ është injektiv dhe, me induksion, $s_k \ge k$.

Për syrjektivitetin, le të jetë $s \in S$. Meqë $s_s \ge s$, ekziston indeksi më i vogël k me $s_k \ge s$. Nëse $s_k > s$, atëherë $s_j < s$ për çdo $j < k$, prandaj $s \in S \setminus \{s_1, \dots, s_{k-1}\}$ dhe

$s_k = \min\big(S \setminus \{s_1, \ldots, s_{k-1}\}\big) \leq s$, kundërshti. Pra $s_k = s$, dhe $k \mapsto s_k$ është bijeksion $\mathbb{N} \to S$. ■

Lema 1.25 (Kriteri i numërueshmërisë)**.** *Për një bashkësi jo boshe A, pohimet e mëposhtme janë të barasvlershme:*

(i) A është e numërueshme;

(ii) ekziston një injeksion $A \to \mathbb{N}$;

(iii) ekziston një syrjeksion $\mathbb{N} \to A$.

Vërtetim. (i)⇒(iii). Nëse $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ është e fundme (me a_k të ndryshëm), marrim $g(k) = a_k$ për $k \leq n$ dhe $g(k) = a_n$ për $k > n$. Nëse A është e pafundme e numërueshme, si g marrim një bijeksion $\mathbb{N} \to A$.

(iii)⇒(ii). Le të jetë $g\colon \mathbb{N} \to A$ syrjektiv. Për çdo $a \in A$, bashkësia $g^{-1}(\{a\})$ është jo boshe; përkufizojmë $h(a) = \min g^{-1}(\{a\})$. Atëherë $g(h(a)) = a$, prandaj nga $h(a) = h(a')$ rrjedh $a = g(h(a)) = g(h(a')) = a'$. Pra $h\colon A \to \mathbb{N}$ është injektiv. Vini re se këtu nuk bëhet asnjë zgjedhje arbitrare: minimumi përcaktohet në mënyrë të vetme.

(ii)⇒(i). Nëse $h\colon A \to \mathbb{N}$ është injektiv, atëherë h është bijeksion nga A në $h(A) \subseteq \mathbb{N}$. Sipas Lemës 1.24, $h(A)$ është e numërueshme, dhe sipas Vërejtjes 1.22 e tillë është edhe A. ■

Rrjedhimi 1.26. *Çdo nënbashkësi e një bashkësie të numërueshme është e numërueshme.*

Vërtetim. Le të jetë $B \subseteq A$, me A të numërueshme dhe $B \neq \varnothing$ (bashkësia boshe është e fundme). Sipas Lemës 1.25 ekziston një injeksion $h\colon A \to \mathbb{N}$; kufizimi i tij në B është injeksion $B \to \mathbb{N}$, dhe përsëri sipas Lemës 1.25, B është e numërueshme. ■

Teorema 1.27. *Bashkësia $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ është e pafundme e numërueshme. Më saktë, funksioni*

$$\varphi\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad \varphi(m, n) = 2^{m-1}(2n - 1), \tag{1.6}$$

është bijeksion.

Vërtetim. Syrjektiviteti. Le të jetë $k \in \mathbb{N}$ dhe $a \geq 0$ eksponenti më i madh i tillë që 2^a e plotpjesëton k (ai ekziston, sepse $2^a \leq k$ për çdo pjesëtues të tillë). Atëherë $b = \frac{k}{2^a}$ është numër natyror tek, pra $b = 2n - 1$ për ndonjë $n \in \mathbb{N}$, dhe $k = \varphi(a + 1, n)$.

Injektiviteti. Le të jetë $2^a b = 2^{a'} b'$ me b, b' tek dhe, për shembull, $a < a'$. Atëherë $b = 2^{a'-a} b'$ është çift, kundërshti. Pra $a = a'$, prandaj $b = b'$. Duke kaluar te $m = a + 1$ dhe $2n - 1 = b$, nga $\varphi(m, n) = \varphi(m', n')$ rrjedh $(m, n) = (m', n')$. ■

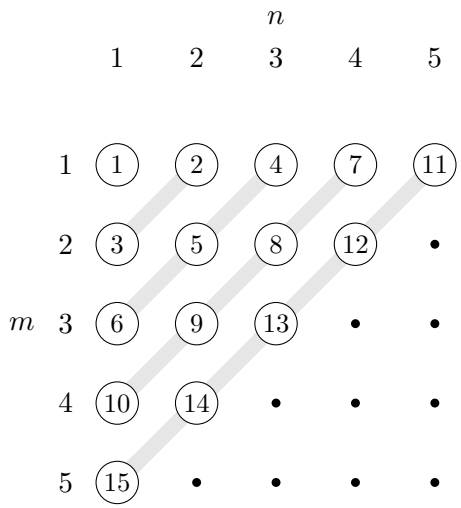


Figura 1.5. Përshkimi diagonal i $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: çiftet (m, n) vizitohen sipas diagonaleve $m + n = 2, 3, 4, \ldots$, dhe brenda çdo diagonaleje sipas rritjes së m: $(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), \ldots$ Në çdo pikë është shënuar numri rendor i çiftit; diagonalet janë hijezuar. Ky përshkim jep një bijeksion tjetër $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, të ndryshëm nga funksioni (1.6); të dy tregojnë të njëjtin përfundim.

Rrjedhimi 1.28. *Nëse A dhe B janë të numërueshme, atëherë edhe $A \times B$ është e numërueshme.*

Vërtetim. Nëse $A = \varnothing$ ose $B = \varnothing$, atëherë $A \times B = \varnothing$. Përndryshe, sipas Lemës 1.25 ekzistojnë syrjeksionet $g\colon \mathbb{N} \to A$ dhe $h\colon \mathbb{N} \to B$. Funksioni $(m, n) \mapsto \big(g(m), h(n)\big)$ është syrjeksion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$, dhe përbërja e tij me bijeksionin $\varphi^{-1}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (Teorema 1.27) është syrjeksion $\mathbb{N} \to A \times B$. Përfundimi rrjedh nga Lema 1.25. ■

Teorema 1.29 (Bashkimi i numërueshëm)**.** *Le të jetë I një bashkësi e numërueshme dhe, për çdo $i \in I$, A_i një bashkësi e numërueshme. Atëherë $\bigcup_{i\in I} A_i$ është e numërueshme.*

Vërtetim. Le të jetë $U = \bigcup_{i\in I} A_i$. Nëse $U = \varnothing$, nuk kemi çfarë të vërtetojmë. Përndryshe, bashkësia $J = \{i \in I :\ A_i \neq \varnothing\}$ është jo boshe dhe, sipas Rrjedhimit 1.26, e numërueshme; gjithashtu $U = \bigcup_{i\in J} A_i$. Sipas Lemës 1.25 ekziston një syrjeksion $u\colon \mathbb{N} \to J$ dhe, për çdo $i \in J$, ekziston një syrjeksion $\mathbb{N} \to A_i$. *Zgjedhim* për çdo $i \in J$ një syrjeksion të tillë $g_i\colon \mathbb{N} \to A_i$. Përkufizojmë

$$G\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to U, \qquad G(m, n) = g_{u(m)}(n).$$

Funksioni G është syrjektiv: nëse $x \in U$, atëherë $x \in A_i$ për ndonjë $i \in J$; ekziston m me $u(m) = i$ dhe n me $g_i(n) = x$, pra $G(m, n) = x$. Atëherë $G \circ \varphi^{-1}\colon \mathbb{N} \to U$ është syrjeksion dhe, sipas Lemës 1.25, U është e numërueshme. ■

Vërejtje 1.30 (Aksioma e zgjedhjes së numërueshme)**.** Në vërtetimin e mësipërm, për çdo $i \in J$ *zgjodhëm njëkohësisht* një syrjeksion g_i nga bashkësia jo boshe e të gjitha

syrjeksioneve $\mathbb{N} \to A_i$. Për një familje të numërueshme bashkësish të çfarëdoshme, kjo zgjedhje e njëkohshme justifikohet nga *aksioma e zgjedhjes së numërueshme*; dihet se, pa ndonjë formë të aksiomës së zgjedhjes, Teorema 1.29 nuk mund të vërtetohet vetëm nga aksiomat e tjera të teorisë së bashkësive. Kur numërimet e bashkësive A_i jepen shprehimisht, si në Rrjedhimin 1.31, nuk nevojitet asnjë zgjedhje.

Rrjedhimi 1.31. *Bashkësia $\mathbb{Q}$ e numrave racionalë është e pafundme e numërueshme.*

Vërtetim. Funksioni

$$r\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \qquad r(p,q) = \frac{p}{q},$$

është syrjektiv, sepse çdo numër racional shkruhet si $\frac{p}{q}$ me $p \in \mathbb{Z}$ dhe $q \in \mathbb{N}$. Bashkësia $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ është e numërueshme sipas Shembullit 1.23 dhe Rrjedhimit 1.28, ku syrjeksionet janë dhënë shprehimisht. Duke përbërë, përftojmë një syrjeksion $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, dhe sipas Lemës 1.25 $\mathbb{Q}$ është e numërueshme. Ajo është e pafundme, sepse $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$. ■

Për argumentin diagonal na nevojitet një fakt nga Analiza Matematike për paraqitjen dhjetore.

Fakt nga Analiza 1.32 (Paraqitja dhjetore kanonike)**.** *Çdo $x \in (0,1)$ shkruhet në mënyrë të vetme në trajtën*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{10^k} = 0{,}d_1 d_2 d_3 \ldots, \qquad d_k \in \{0,1,\ldots,9\},$$

ku vargu i shifrave (d_k) nuk *është përfundimisht i barabartë me* 9 *(pra nuk ekziston K me $d_k = 9$ për çdo $k \geq K$). Kjo paraqitje quhet* kanonike*. Anasjelltas, çdo varg shifrash që nuk është përfundimisht* 9 *dhe që nuk ka të gjitha shifrat* 0 *është paraqitja kanonike e një numri të vetëm në $(0,1)$. Kushti për shifrat* 9 *është i domosdoshëm, sepse, për shembull,* $0{,}1999\cdots = 0{,}2000\ldots$.

Teorema 1.33 (Cantor)**.** *Intervali $(0,1)$ është i panumërueshëm.*

Vërtetim. Supozojmë të kundërtën. Meqë $(0,1) \neq \varnothing$, sipas Lemës 1.25 ekziston një syrjeksion $g\colon \mathbb{N} \to (0,1)$. Shkruajmë çdo $g(n)$ në paraqitjen kanonike

$$g(n) = 0{,}d_{n1}\, d_{n2}\, d_{n3} \ldots \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Përkufizojmë vargun e shifrave

$$c_n = \begin{cases} 4, & d_{nn} \neq 4, \\ 5, & d_{nn} = 4, \end{cases} \qquad \text{dhe} \qquad y = 0{,}c_1 c_2 c_3 \ldots$$

Shifrat e y janë vetëm 4 ose 5; prandaj vargi i tyre nuk është përfundimisht 9 dhe nuk ka të gjitha shifrat 0. Sipas Faktit 1.32, $y \in (0,1)$ dhe $0{,}c_1c_2c_3\ldots$ është paraqitja kanonike e y. Për çdo $n \in \mathbb{N}$, shifra e n-të e paraqitjes kanonike të y është $c_n \neq d_{nn}$, ndërsa shifra e n-të e paraqitjes kanonike të $g(n)$ është d_{nn}. Meqë paraqitja kanonike është e vetme, $y \neq g(n)$. Kjo vlen për çdo n, prandaj $y \notin g(\mathbb{N})$, në kundërshtim me syrjektivitetin e g. ■

$$
\begin{array}{lccccc}
g(1) = 0, & \boxed{d_{11}} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & \cdots \\
g(2) = 0, & d_{21} & \boxed{d_{22}} & d_{23} & d_{24} & \cdots \\
g(3) = 0, & d_{31} & d_{32} & \boxed{d_{33}} & d_{34} & \cdots \\
g(4) = 0, & d_{41} & d_{42} & d_{43} & \boxed{d_{44}} & \cdots \\
 & & & \vdots & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
c_n \neq d_{nn} \text{ për çdo } n \\
y = 0{,}c_1c_2c_3c_4\ldots \\
\Longrightarrow\ y \neq g(n) \text{ për çdo } n
\end{array}
$$

Figura 1.6. Argumenti diagonal i Cantor-it. Shifrat diagonale d_{nn} (në kuadrat) ndryshohen; numri y që përftohet ndryshon nga $g(n)$ në shifrën e n-të.

Rrjedhimi 1.34. *Bashkësitë $\mathbb{R}$ dhe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ janë të panumërueshme.*

Vërtetim. Nëse $\mathbb{R}$ do të ishte e numërueshme, sipas Rrjedhimit 1.26 e tillë do të ishte edhe nënbashkësia e saj $(0,1)$, në kundërshtim me Teoremën 1.33. Nëse $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ do të ishte e numërueshme, atëherë $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ do të ishte bashkim i dy bashkësive të numërueshme, pra e numërueshme sipas Teoremës 1.29 (për një familje me dy bashkësi nuk nevojitet aksioma e zgjedhjes), kundërshti. ■

Argumenti diagonal ka edhe një formë të përgjithshme, që vlen për çdo bashkësi.

Teorema 1.35 (Cantor, forma e përgjithshme)**.** *Për çdo bashkësi X nuk ekziston asnjë syrjeksion $X \to \mathcal{P}(X)$, ku $\mathcal{P}(X)$ është bashkësia e të gjitha nënbashkësive të X. Në veçanti, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ është e panumërueshme.*

Vërtetim. Le të jetë $F\colon X \to \mathcal{P}(X)$ një funksion çfarëdo dhe $D = \{x \in X :\ x \notin F(x)\} \in \mathcal{P}(X)$. Nëse $D = F(x_0)$ për ndonjë $x_0 \in X$, atëherë $x_0 \in D \iff x_0 \notin F(x_0) \iff x_0 \notin D$, kundërshti. Pra $D \notin F(X)$ dhe F nuk është syrjektiv. Për $X = \mathbb{N}$, nëse $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ do të ishte e numërueshme, sipas Lemës 1.25 do të ekzistonte një syrjeksion $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. ■

Drejt topologjisë. *Familja e intervaleve (p,q) me $p,q \in \mathbb{Q}$ dhe $p < q$ është e numërueshme, sepse ajo është shembëllimi i një nënbashkësie të $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ nën funksionin që çiftit (p,q) i shoqëron intervalin me skaje p dhe q (Rrjedhimet 1.28, 1.31 dhe Lema 1.25).*

Në Ushtrimin 1.13 tregohet se çdo bashkësi e hapur e $\mathbb{R}$ është bashkim intervalesh të kësaj familjeje; kjo do të thotë se topologjia e zakonshme e $\mathbb{R}$ ka bazë të numërueshme. *Gjithashtu, $\mathbb{Q}$ është e numërueshme dhe e dendur në $\mathbb{R}$, ndërsa $\mathbb{R}$ është e panumërueshme: dendësia dhe kardinaliteti janë veti të ndryshme. Teorema 1.35 tregon se një topologji në X, si nënbashkësi e $\mathcal{P}(X)$, mund të jetë "shumë më e madhe" se vetë X.*

1.4. Përmbledhje dhe gabime të zakonshme

Nocioni	**Rezultati kryesor**	**Ku përdoret më vonë**
Familjet e indeksuara	Ligjet e De Morganit (T. 1.7); familja boshe (V. 1.4)	Aksiomat e topologjisë; bashkësitë e mbyllura
Parabashkësia	Ruan bashkimin, prerjen, komplementin dhe përbërjen (T. 1.16)	Vazhdueshmëria
Shëmbëllimi	Ruan bashkimin; prerjen vetëm me injektivitet (T. 1.17)	Funksionet e hapura dhe të mbyllura
Numërueshmëria	$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ të numërueshme; bashkimi i numërueshëm (T. 1.29)	Bazat e numërueshme; hapësirat separabël
Panumërueshmëria	$(0,1)$, $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (T. 1.33, T. 1.35)	Krahasimi i kardinaliteteve

Gabime të zakonshme.

1. *Ngatërrimi i parabashkësisë me funksionin e anasjelltë.* Shënimi $f^{-1}(B)$ ka kuptim për çdo funksion (Vërejtja 1.14).
2. *Barazimi $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ pa injektivitet.* Në përgjithësi vlen vetëm përfshirja $\subseteq$ (Shembulli 1.19).
3. *Prerja e pafundme e bashkësive të hapura trajtohet si e hapur.* Shembulli 1.6 e hedh poshtë këtë.
4. *Harrimi i pikave skajore.* Për shembull, $\bigcup_n \left[\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}\right]$ është $(0,2)$ dhe jo $[0,2]$.
5. *Vërtetimi i barazimit të dy bashkësive me një përfshirje të vetme.* Duhen të dyja përfshirjet, ose një varg ekuivalencash si në Teoremën 1.7.

6. *Ngatërrimi i dendësisë me panumërueshmërinë.* $\mathbb{Q}$ është e dendur në $\mathbb{R}$, por e numërueshme.

7. *Paraqitjet dhjetore jokanonike në argumentin e Cantor-it.* Pa kushtin e Faktit 1.32, dy paraqitje të ndryshme mund të japin të njëjtin numër.

1.5. Ushtrime të zgjidhura për seminar

Çdo ushtrim (në kornizë) pasohet menjëherë nga zgjidhja e plotë. Zgjidhja fillon me *metodën*, pra me idenë që e drejton arsyetimin, dhe vazhdon hap pas hapi; fundi i saj shënohet me □. Rekomandohet që studenti ta mbulojë zgjidhjen, të shkruajë zgjidhjen e vet dhe vetëm pastaj ta krahasojë.

Ushtrimet janë ndarë në tre nivele: *bazë* (zbatim i drejtpërdrejtë i përkufizimeve), *mesatar* (familje të pafundme, kardinalitet, përbërje funksionesh) dhe *i avancuar* (vërtetime me karakterizime të plota).

Niveli bazë

Ushtrimi 1.1. Për $A = (-3, 2]$ dhe $B = [0, 4)$ në $\mathbb{R}$, gjeni $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ dhe $B \setminus A$.

***Zgjidhje**. Metoda.* Shqyrtojmë veçmas pjesët e brendshme të intervaleve dhe pikat skajore.

Pikat skajore janë $-3, 0, 2, 4$. Kemi $-3 \notin A$, $0 \in A \cap B$, $2 \in A \cap B$, $4 \notin B$.

(1) $A \cap B$: pikat që plotësojnë njëkohësisht $-3 < x \leq 2$ dhe $0 \leq x < 4$, pra $0 \leq x \leq 2$: $A \cap B = [0, 2]$.

(2) $A \cup B$: pikat që plotësojnë të paktën njërin kusht, pra $-3 < x < 4$: $A \cup B = (-3, 4)$.

(3) $A \setminus B$: $-3 < x \leq 2$ dhe jo $0 \leq x < 4$; meqë $x \leq 2 < 4$, kushti i dytë bëhet $x < 0$: $A \setminus B = (-3, 0)$.

(4) $B \setminus A$: $0 \leq x < 4$ dhe jo $-3 < x \leq 2$; meqë $x \geq 0 > -3$, kushti i dytë bëhet $x > 2$: $B \setminus A = (2, 4)$.

□

Ushtrimi 1.2. Për $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, gjeni $f^{-1}([4,16])$, $f^{-1}\big((1,9]\big)$, $f^{-1}\big([-4,-1]\big)$ dhe $f([-3,2])$.

***Zgjidhje**. Metoda.* Kalojmë nga kushti për x^2 te kushti për $|x|$; për shëmbëllimin, e ndajmë intervalin në pjesë ku funksioni është monoton.

- $4 \le x^2 \le 16 \iff 2 \le |x| \le 4$, pra $f^{-1}([4,16]) = [-4,-2] \cup [2,4]$.
- $1 < x^2 \le 9 \iff 1 < |x| \le 3$, pra $f^{-1}\big((1,9]\big) = [-3,-1) \cup (1,3]$.
- $x^2 \ge 0 > -1$ për çdo x, pra $f^{-1}\big([-4,-1]\big) = \varnothing$.
- Në $[-3,0]$ funksioni zbret nga 9 në 0, ndërsa në $[0,2]$ rritet nga 0 në 4. Prandaj $f([-3,2]) = [0,9] \cup [0,4] = [0,9]$.

□

Ushtrimi 1.3. Vërtetoni me metodën e elementit se për çdo $A, B, C \subseteq X$:

$$A \setminus B = A \cap B^c \qquad \text{dhe} \qquad A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

***Zgjidhje**. Metoda.* Metoda e elementit; barazimi i dytë nxirret nga i pari dhe nga ligjet e De Morganit.

Për $x \in X$: $x \in A \setminus B \iff x \in A$ dhe $x \notin B \iff x \in A$ dhe $x \in B^c \iff x \in A \cap B^c$. Për barazimin e dytë, duke përdorur të parin dhe Teoremën 1.7:

$$A \setminus (B \cup C) = A \cap (B \cup C)^c = A \cap (B^c \cap C^c) = (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

□

Ushtrimi 1.4. Le të jetë $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Gjeni $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ dhe $f^{-1}\left(\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)$. A është f injektiv? A është syrjektiv?

***Zgjidhje**. Metoda.* Meqë $1 + x^2 > 0$, mosbarazimet mund të shumëzohen me $1 + x^2$ pa ndryshuar kahun.

Bashkësia e vlerave. Për çdo x kemi $1 + x^2 \geq 1$, prandaj $0 < f(x) \leq 1$, pra $f(\mathbb{R}) \subseteq (0, 1]$. Anasjelltas, për $y \in (0, 1]$ barazimi $\frac{1}{1+x^2} = y$ është i barasvlershëm me $x^2 = \frac{1}{y} - 1 \geq 0$, që ka zgjidhjen $x = \sqrt{\frac{1}{y} - 1}$. Pra $f(\mathbb{R}) = (0, 1]$.

Parabashkësitë. Meqë $1 + x^2 > 0$: $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \iff 1 + x^2 \leq 2 \iff x^2 \leq 1$, pra $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = [-1, 1]$. Ngjashëm, $0 < \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{2} \iff x^2 > 1$, pra $f^{-1}\left(\left(0, \frac{1}{2}\right)\right) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Vetitë. f nuk është injektiv, sepse $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$, dhe nuk është syrjektiv, sepse $f(\mathbb{R}) = (0, 1] \neq \mathbb{R}$. □

Niveli mesatar

Ushtrimi 1.5. Gjeni

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) \qquad \text{dhe} \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right).$$

***Zgjidhje**. Metoda.* Përfshirje në të dy drejtimet; për pikat e brendshme përdorim vetinë e Arkimedit.

Bashkimi është $(0, 1)$. Çdo interval $\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$ përmbahet në $(0, 1)$ (për $n = 1, 2$ ai është bosh). Anasjelltas, për $0 < x < 1$ zgjedhim $n \in \mathbb{N}$ me $n > \max\left\{\frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}\right\}$; atëherë $\frac{1}{n} < x$ dhe $\frac{1}{n} < 1 - x$, pra $\frac{1}{n} < x < 1 - \frac{1}{n}$.

Prerja është $\{1\}$. Pika 1 i përket çdo intervali. Nëse $x \neq 1$, sipas vetisë së Arkimedit ekziston n me $\frac{1}{n} \leq |x - 1|$; atëherë $x \notin \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$. □

Ushtrimi 1.6. Jepni një familje të numërueshme bashkësish të mbyllura në $\mathbb{R}$ bashkimi i së cilës nuk është i mbyllur. Shpjegoni lidhjen me Shembullin 1.6 dhe Teoremën 1.7.

***Zgjidhje**. Metoda.* Ndërtojmë kundërshembullin si "pasqyrë" të Shembullit 1.6, duke kaluar në komplemente.

Le të jetë $F_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $n \in \mathbb{N}$. Çdo F_n është e mbyllur. Bashkimi është $(0,1]$: çdo $x \in (0,1]$ i përket F_n për $n \geq \frac{1}{x}$, ndërsa 0 nuk i përket asnjë F_n. Bashkësia $(0,1]$ nuk është e mbyllur, sepse komplementi i saj $(-\infty, 0] \cup (1, \infty)$ nuk është i hapur: asnjë interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$ nuk përmbahet në të. *Lidhja:* sipas Teoremës 1.7, $\left(\bigcup_n F_n\right)^c = \bigcap_n F_n^c$; kështu ky shembull është "pasqyra" e Shembullit 1.6: prerja e pafundme e bashkësive të hapura F_n^c nuk është e hapur. □

Ushtrimi 1.7. Vërtetoni se intervalet $(0,1)$, (a,b) (për $a < b$) dhe $(1,\infty)$ kanë të njëjtin kardinalitet, duke ndërtuar bijeksione të qarta.

***Zgjidhje**. Metoda.* Ndërtojmë funksione rreptësisht monotone dhe gjejmë shprehimisht funksionin e anasjelltë.

$(0,1)$ dhe (a,b). Funksioni $u(x) = a + (b-a)x$ është bijeksion $(0,1) \to (a,b)$: ai është rreptësisht rritës (pra injektiv), dhe për $y \in (a,b)$ numri $x = \frac{y-a}{b-a} \in (0,1)$ plotëson $u(x) = y$.

$(0,1)$ dhe $(1,\infty)$. Funksioni $v(x) = \frac{1}{x}$ është bijeksion $(0,1) \to (1,\infty)$: për $0 < x < 1$ kemi $\frac{1}{x} > 1$; ai është rreptësisht zbritës (pra injektiv); për $y > 1$, numri $x = \frac{1}{y} \in (0,1)$ plotëson $v(x) = y$. Sipas kalimtarisë (Vërejtja 1.22), të tre intervalet kanë të njëjtin kardinalitet; sipas Teoremës 1.33 ata janë të panumërueshëm. □

Ushtrimi 1.8. Le të jenë $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$, dhe $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$. Gjeni $(g \circ f)^{-1}([0,4])$ në dy mënyra: drejtpërdrejt dhe duke përdorur barazimin $(g \circ f)^{-1}(D) = f^{-1}\big(g^{-1}(D)\big)$.

***Zgjidhje**. Metoda.* Llogaritje e drejtpërdrejtë dhe kontroll me formulën për parabashkësinë e përbërjes.

Drejtpërdrejt. $(g \circ f)(x) = (x+1)^2$, dhe $0 \le (x+1)^2 \le 4 \iff |x+1| \le 2 \iff -3 \le x \le 1$. Pra $(g \circ f)^{-1}([0,4]) = [-3,1]$.

Me përbërje. $g^{-1}([0,4]) = \{t :\ t^2 \le 4\} = [-2,2]$, dhe $f^{-1}([-2,2]) = \{x :\ -2 \le x+1 \le 2\} = [-3,1]$. Të dy mënyrat japin të njëjtin rezultat, siç pohon Teorema 1.16. □

Niveli i avancuar

Ushtrimi 1.9. Le të jetë $f\colon X \to Y$. Vërtetoni se $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ për çdo $A, B \subseteq X$ atëherë dhe vetëm atëherë kur f është injektiv.

***Zgjidhje**. Metoda.* Drejtimi i lehtë rrjedh nga Teorema 1.17; për drejtimin tjetër zgjedhim bashkësi me nga një element.

($\Leftarrow$) Nëse f është injektiv, barazimi rrjedh nga Teorema 1.17(b) për $I = \{1,2\}$.

($\Rightarrow$) Supozojmë se barazimi vlen për çdo A, B dhe le të jenë $x_1, x_2 \in X$ me $f(x_1) = f(x_2)$. Marrim $A = \{x_1\}$ dhe $B = \{x_2\}$. Atëherë $f(A) \cap f(B) = \{f(x_1)\} \neq \varnothing$, prandaj edhe $f(A \cap B) \neq \varnothing$, pra $A \cap B \neq \varnothing$. Kjo do të thotë $x_1 = x_2$, dhe f është injektiv. □

Ushtrimi 1.10. Le të jetë $f\colon X \to Y$. Vërtetoni se $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$ për çdo $B \subseteq Y$ atëherë dhe vetëm atëherë kur f është syrjektiv.

***Zgjidhje**. Metoda.* Përdorim barazimin $f\big(f^{-1}(B)\big) = B \cap f(X)$ të Teoremës 1.17(c).

($\Leftarrow$) Nëse f është syrjektiv, $f(X) = Y$ dhe $B \cap f(X) = B$. ($\Rightarrow$) Për $B = Y$, hipoteza jep $f(X) = f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y$, pra f është syrjektiv. □

Ushtrimi 1.11. Vërtetoni se çdo familje intervalesh të hapura jo boshe në $\mathbb{R}$, dy nga dy të pandërprera, është e numërueshme.

***Zgjidhje**. Metoda.* Çdo intervali i shoqërojmë, pa asnjë zgjedhje arbitrare, një numër racional; intervalet e ndryshme marrin numra të ndryshëm.

Le të jetë $\mathcal{J}$ një familje e tillë. Sipas Rrjedhimit 1.31 fiksojmë një numërim $q_1, q_2, q_3, \ldots$ të $\mathbb{Q}$. Çdo interval i hapur jo bosh J përmban numra racionalë, sepse $\mathbb{Q}$ është e dendur në $\mathbb{R}$; le të jetë $k(J) = \min\{k \in \mathbb{N} : \ q_k \in J\}$. Nëse $J \neq J'$, atëherë $J \cap J' = \varnothing$, prandaj $q_{k(J)} \neq q_{k(J')}$ dhe $k(J) \neq k(J')$. Pra $J \mapsto k(J)$ është injeksion $\mathcal{J} \to \mathbb{N}$, dhe sipas Lemës 1.25 familja $\mathcal{J}$ është e numërueshme. Vini re se nuk u përdor aksioma e zgjedhjes: indeksi $k(J)$ përcaktohet si minimum. □

Ushtrimi 1.12. Vërtetoni se bashkësia $\mathcal{F}$ e të gjitha nënbashkësive të fundme të $\mathbb{N}$ është e numërueshme. Krahasoni këtë rezultat me Teoremën 1.35.

***Zgjidhje**. Metoda.* Kodojmë çdo bashkësi të fundme me një numër të shkruar në sistemin binar.

Çdo nënbashkësi e fundme $S \subseteq \mathbb{N}$ i shoqërojmë numrin $\beta(S) = \sum_{k \in S} 2^{k-1}$ (me $\beta(\varnothing) = 0$). Sipas unicitetit të paraqitjes binare të numrave të plotë jonegativë, β është bijeksion nga $\mathcal{F}$ në $\{0\} \cup \mathbb{N}$: bashkësia S është pikërisht bashkësia e pozicioneve k ku shifra binare e $\beta(S)$ (e numëruar nga 1) është 1. Funksioni $S \mapsto \beta(S) + 1$ është atëherë bijeksion $\mathcal{F} \to \mathbb{N}$, pra $\mathcal{F}$ është e pafundme e numërueshme. *Krahasimi:* $\mathcal{F}$ është e numërueshme, ndërsa $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ është e panumërueshme (Teorema 1.35); pra "shumica" e nënbashkësive të $\mathbb{N}$ janë të pafundme. □

Ushtrimi 1.13. Le të jetë $\mathcal{B} = \{(p, q) : \ p, q \in \mathbb{Q},\ p < q\}$. Vërtetoni se $\mathcal{B}$ është e numërueshme dhe se çdo bashkësi e hapur $U \subseteq \mathbb{R}$ është bashkim i elementeve të $\mathcal{B}$ që përmbahen në U.

***Zgjidhje**. Metoda.* Numërueshmëria nxirret nga $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$; barazimi i bashkësive vërtetohet me përfshirje në dy drejtimet.

Numërueshmëria. Funksioni që çiftit $(p, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ me $p < q$ i shoqëron intervalin e hapur me skaje p dhe q është syrjeksion mbi $\mathcal{B}$. Bashkësia $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ është e numërueshme (Rrjedhimet 1.28 dhe 1.31), prandaj e tillë është edhe nënbashkësia e çifteve me $p < q$ (Rrjedhimi 1.26); përbërja jep një syrjeksion $\mathbb{N} \to \mathcal{B}$, dhe sipas Lemës 1.25 $\mathcal{B}$ është e numërueshme.

Bashkimi. Le të jetë U e hapur dhe V bashkimi i të gjitha intervaleve $(p,q) \in \mathcal{B}$ me $(p,q) \subseteq U$. Qartë $V \subseteq U$. Anasjelltas, le të jetë $x \in U$. Ekziston $\varepsilon > 0$ me $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U$. Meqë $\mathbb{Q}$ është e dendur në $\mathbb{R}$, ekzistojnë $p, q \in \mathbb{Q}$ me $x - \varepsilon < p < x < q < x + \varepsilon$. Atëherë $x \in (p,q) \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U$, pra $x \in V$. Kështu $U = V$. □

1.6. Pyetje për vetëkontroll

Pyetjet e mëposhtme nuk kanë zgjidhje të shkruar; secila i referohet një rezultati të kapitullit dhe mund të përdoret për diskutim në seminar.

1. Pse aksiomat e topologjisë kërkojnë mbyllje ndaj prerjeve të fundme dhe jo ndaj prerjeve të çfarëdoshme?
2. Cili është dallimi ndërmjet parabashkësisë $f^{-1}(B)$ dhe funksionit të anasjelltë f^{-1}?
3. Në cilat kushte shëmbëllimi i prerjes është i barabartë me prerjen e shëmbëllimeve?
4. Si ndërtohet një bijeksion ndërmjet $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dhe $\mathbb{N}$?
5. Pse argumenti diagonal përdor paraqitje dhjetore kanonike?
6. Si lidhet numërueshmëria e $\mathbb{Q}$ me bazat e numërueshme në $\mathbb{R}$?

Lidhja me Kapitullin 2. Dy veti të bashkësive të hapura në $\mathbb{R}$ që u përdorën në këtë kapitull, bashkimi i çfarëdoshëm i të hapurave është i hapur dhe prerja e fundme e tyre është e hapur, ndërsa prerja e pafundme mund të mos jetë e hapur (Shembulli 1.6), bëhen në Kapitullin 2 aksiomat e përkufizimit të hapësirës topologjike. Ligjet e De Morgan-it (Teorema 1.7) japin aty dualitetin ndërmjet bashkësive të hapura dhe të mbyllura, kurse parabashkësitë përgatisin përkufizimin e vazhdueshmërisë.

Literatura

[1] P. R. Halmos, *Naive Set Theory*, Van Nostrand, Princeton, 1960.

[2] J. R. Munkres, *Topology*, botimi i 2-të, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.

[3] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading, 1970.

Shënim. Syllabus-i i lëndës referon edhe tekstin E. Hoxha, *Topologjia e përgjithshme*. Të dhënat e botimit të këtij teksti nuk u verifikuan dot; ai do të përfshihet në listën e mësipërme pas verifikimit bibliografik.

© 2026 Prof. As. Dr. Siditë Duraj · Material mësimor universitar · Universiteti i Shkodrës "Luigj Gurakuqi"